

目 录

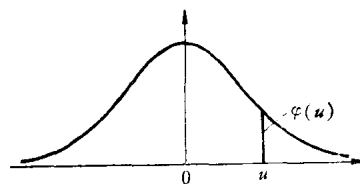
数表	1
1. 正态分布的密度函数表	1
2. 正态分布表	2
3. 正态分布的双侧分位数(u_α)表	4
4. χ^2 分布表	4
5. χ^2 分布的上侧分位数(χ^2_α)表	6
6. t 分布表	7
7. t 分布的双侧分位数(t_α)表	8
8. F 检验的临界值(F_α)表	9
9. 非中心 F 分布的非中心参数表	14
10. 多重比较中的 q 表	16
11. 多重比较中的 S 表	17
12. 检验相关系数 $\rho=0$ 的临界值(r_α)表	18
13. r 与 z 的换算表	18
14. 二项分布表	19
15. 二项分布参数 P 的置信区间表	21
16. 泊松(Poisson)分布表	25
17. 泊松(Poisson)分布参数 λ 的置信区间表	30
18. 柯尔莫哥洛夫(Колмогоров)检验的临界值($D_{n\alpha}$)表	30
19. D_n 的极限分布表	31
20. 斯米尔诺夫(Смирнов)检验的临界值($m(n_1, n_2, \alpha)$)表	32
21. 一次抽样方案的接收概率计算表	33
22. 一次抽样方案计算表	34
23. 符号检验表	35
24. 秩和检验表	35
25. 游程总数检验表	36
26. 游程长度检验表	37
27. 极差系数 d_n 和极差分布的分位数表	38
28. 正交多项式表	38
29. 正交拉丁方表	41
30. 正交表	43
31. 平衡不完全区组设计的参数表	64
32. 平衡不完全区组设计表	65
33. 随机数表	75
34. 平方表	77
35. 开方表	79
36. 倒数表	83

37. 常用对数表	85
38. 自然对数表	87
39. 阶乘和阶乘的对数表	93
40. 二项系数表	94
41. 二项系数的对数表	94
42. 常用常数表	96
表的说明	97
表 1—3	97
表 4—5	102
表 6—7	105
表 8—9	108
表 10	111
表 11	112
表 12—13	114
表 14—15	116
表 16—17	117
表 18—20	118
表 21—22	120
表 23	122
表 24	123
表 25—26	124
表 27	126
表 28	127
表 29	130
表 30	131
表 31—32	137
表 33	141
参考书目	143

数 表

1. 正态分布的密度函数表

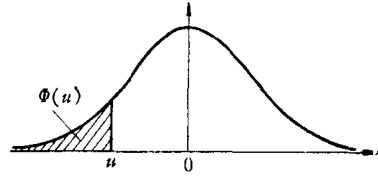
$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	u
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3930	0.3977	0.3973	0.0
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918	0.1
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825	0.2
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697	0.3
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538	0.4
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352	0.5
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144	0.6
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920	0.7
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685	0.8
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444	0.9
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203	1.0
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965	1.1
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736	1.2
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518	1.3
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315	1.4
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127	1.5
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0972	.0956	1.6
1.7	.0940	.0924	.0908	.0893	.0878	.0862	.0847	.0832	.0818	.0803	1.7
1.8	.0789	.0775	.0761	.0747	.0734	.0720	.0707	.0694	.0681	.0668	1.8
1.9	.0656	.0643	.0631	.0619	.0607	.0595	.0584	.0573	.0561	.0550	1.9
2.0	.0539	.0529	.0518	.0508	.0493	.0487	.0473	.0462	.0452	.0441	2.0
2.1	.0429	.0420	.0411	.0402	.0391	.0385	.0371	.0362	.0352	.0342	2.1
2.2	.0334	.0327	.0319	.0311	.0301	.0294	.0281	.0272	.0262	.0253	2.2
2.3	.0243	.0237	.0230	.0222	.0213	.0206	.0194	.0186	.0176	.0167	2.3
2.4	.0158	.0152	.0145	.0138	.0130	.0123	.0111	.0104	.0094	.0086	2.4
2.5	.0078	.0073	.0067	.0060	.0053	.0046	.0034	.0028	.0019	.0011	2.5
2.6	.0008	.0007	.0006	.0005	.0004	.0003	.0002	.0001	.0001	.0000	2.6
2.7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	2.7
2.8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	2.8
2.9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	2.9
3.0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	3.0
3.1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	3.1
3.2	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	3.2
3.3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	3.3
3.4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	3.4
3.5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	3.5
3.6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	3.6
3.7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	3.7
3.8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	3.8
3.9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	3.9
4.0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	4.0
4.1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	4.1
4.2	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	4.2
4.3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	4.3
4.4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	4.4
4.5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	4.5
4.6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	4.6
4.7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	4.7
4.8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	4.8
4.9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	4.9

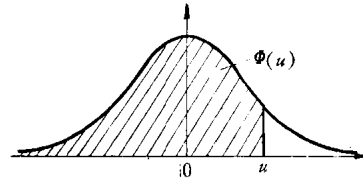
2. 正态分布表

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (u \leq 0)$$



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	u
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641	-0.0
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247	-0.1
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859	-0.2
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483	-0.3
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121	-0.4
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776	-0.5
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451	-0.6
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2149	-0.7
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867	-0.8
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611	-0.9
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379	-1.0
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170	-1.1
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985	-1.2
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0917	.0901	.0885	.0869	.0853	.0837	.0822	-1.3
-1.4	.0807	.0792	.0778	.0763	.0749	.0735	.0721	.0707	.0694	.0681	-1.4
-1.5	.0668	.0655	.0642	.0630	.0617	.0605	.0593	.0582	.0570	.0559	-1.5
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0515	.0505	.0494	.0484	.0474	.0464	.0455	-1.6
-1.7	.0445	.0436	.0427	.0418	.0409	.0400	.0392	.0383	.0375	.0367	-1.7
-1.8	.0359	.0351	.0343	.0336	.0328	.0321	.0314	.0307	.0300	.0293	-1.8
-1.9	.0287	.0280	.0274	.0268	.0261	.0255	.0250	.0244	.0238	.0233	-1.9
-2.0	.0227	.0222	.0216	.0211	.0206	.0201	.0197	.0192	.0187	.0183	-2.0
-2.1	.0178	.0174	.0170	.0165	.0161	.0157	.0153	.0150	.0146	.0142	-2.1
-2.2	.0139	.0135	.0132	.0128	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	-2.2
-2.3	.0107	.0104	.0101	.0098	.0096	.0093	.0091	.0089	.0086	.0084	-2.3
-2.4	.0081	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	-2.4
-2.5	.0061	.0059	.0058	.0056	.0054	.0052	.0050	.0048	.0046	.0044	-2.5
-2.6	.0043	.0041	.0040	.0038	.0036	.0034	.0032	.0030	.0028	.0026	-2.6
-2.7	.0025	.0023	.0022	.0020	.0018	.0016	.0014	.0012	.0010	.0008	-2.7
-2.8	.0007	.0005	.0004	.0003	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	-2.8
-2.9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-2.9
-3.0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-3.0
-3.1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-3.1
-3.2	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-3.2
-3.3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-3.3
-3.4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-3.4
-3.5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-3.5
-3.6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-3.6
-3.7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-3.7
-3.8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-3.8
-3.9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-3.9
-4.0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-4.0
-4.1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-4.1
-4.2	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-4.2
-4.3	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-4.3
-4.4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-4.4
-4.5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-4.5
-4.6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-4.6
-4.7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-4.7
-4.8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-4.8
-4.9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-4.9

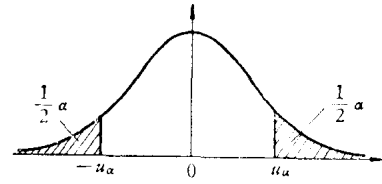
$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (u \geq 0)$$



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	u
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	0.0
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5752	0.1
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141	0.2
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6444	.6480	.6517	0.3
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879	0.4
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224	0.5
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549	0.6
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852	0.7
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133	0.8
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389	0.9
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621	1.0
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830	1.1
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9014	1.2
1.3	.9032	.9049	.9065	.9082	.9098	.9114	.9130	.9146	.9162	.9177	1.3
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9250	.9264	.9278	.9292	.9306	.9319	1.4
1.5	.9331	.9344	.9357	.9369	.9382	.9394	.9406	.9417	.9429	.9440	1.5
1.6	.9450	.9460	.9470	.9480	.9490	.9500	.9510	.9520	.9530	.9540	1.6
1.7	.9550	.9560	.9570	.9580	.9590	.9600	.9610	.9620	.9630	.9640	1.7
1.8	.9640	.9650	.9660	.9670	.9680	.9690	.9700	.9710	.9720	.9730	1.8
1.9	.9740	.9750	.9760	.9770	.9780	.9790	.9800	.9810	.9820	.9830	1.9
2.0	.9840	.9850	.9860	.9870	.9880	.9890	.9900	.9910	.9920	.9930	2.0
2.1	.9940	.9950	.9960	.9970	.9980	.9990	.9995	.9998	.9999	.9999	2.1
2.2	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	2.2
2.3	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	2.3
2.4	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	2.4
2.5	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	2.5
2.6	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	2.6
2.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	2.7
2.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	2.8
2.9	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	2.9
3.0	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.0
3.1	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.1
3.2	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.2
3.3	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.3
3.4	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.4
3.5	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.5
3.6	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.6
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.7
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.8
3.9	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.9
4.0	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	4.0
4.1	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	4.1
4.2	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	4.2
4.3	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	4.3
4.4	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	4.4
4.5	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	4.5
4.6	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	4.6
4.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	4.7
4.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	4.8
4.9	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	4.9

3. 正态分布的双侧分位数 (u_α) 表

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

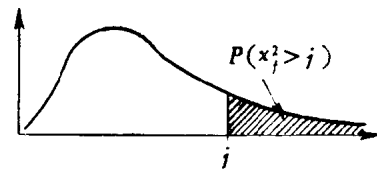


α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	α
0.0	∞	2.575829	2.326348	2.170090	2.053749	1.939964	1.880794	1.811911	1.750686	1.695398	0.0
0.1	1.644854	1.598193	1.554774	1.514102	1.475791	1.439531	1.405072	1.372204	1.340755	1.310579	0.1
0.2	1.281552	1.253565	1.226528	1.200259	1.174987	1.150349	1.126991	1.103063	1.080319	1.058122	0.2
0.3	1.086493	1.015222	0.994458	0.974114	0.954165	0.934589	0.915365	0.896473	0.877896	0.859617	0.3
0.4	0.841621	0.822894	.806421	.789192	.772193	.755415	.738847	.722479	.706303	.690309	0.4
0.5	.674490	.658838	.643945	.628006	.612818	.597760	.582841	.568051	.553395	.538836	0.5
0.6	.524401	.510073	.495850	.481727	.467699	.453762	.439913	.426148	.412463	.398855	0.6
0.7	.385320	.371856	.358459	.345125	.331853	.318659	.305481	.292375	.279219	.266311	0.7
0.8	.253347	.240426	.227545	.214702	.201893	.189113	.176374	.163658	.150969	.138304	0.8
0.9	.125661	.113039	.100424	.087845	.075270	.062707	.050154	.037608	.025069	.012533	0.9
α	0.001	0.0001	0.00001			0.000001		0.0000001		0.00000001	α
u_α	3.29053	2.89059	4.41717			4.89164		5.32672		5.78073	u_α

4. χ^2 分布表

f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0.8179	0.6065	0.8013	0.9098	0.9626	0.9856	0.9948	0.9982	0.9994	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	.1574	.3679	.5724	.7588	.8491	.9197	.9593	.9810	.9915	.9963	.9983	0.9994	0.9998	0.9999	1.0000
3	.0833	.2231	.3916	.5578	.7000	.8088	.8850	.9344	.9643	.9814	.9907	.9955	.9979	.9991	0.9996
4	.0455	.1353	.2615	.4060	.5494	.6767	.7793	.8571	.9114	.9473	.9699	.9834	.9912	.9955	.9977
5	.0254	.0821	.1718	.2872	.4159	.5438	.6630	.7576	.8243	.8912	.9312	.9580	.9752	.9838	.9921
6	.0143	.0493	.1118	.1991	.3062	.4232	.5398	.6472	.7399	.8153	.8734	.9161	.9462	.9665	.9797
7	.0081	.0302	.0719	.1359	.2206	.3208	.4289	.5366	.6371	.7254	.7991	.8576	.9022	.9247	.9373
8	.0047	.0183	.0460	.0916	.1562	.2381	.3326	.4335	.5341	.6283	.7133	.7851	.8436	.8899	.9238
9	.0027	.0111	.0293	.0611	.1091	.1736	.2527	.3428	.4373	.5321	.6219	.7029	.7729	.8311	.8775
10	.0016	.0067	.0186	.0404	.0752	.1247	.1886	.2650	.3505	.4405	.5304	.6160	.6929	.7622	.8197
11	.0009	.0041	.0117	.0266	.0514	.0884	.1386	.2017	.2757	.3575	.4432	.5289	.6108	.6860	.7526
12	.0005	.0025	.0074	.0174	.0348	.0620	.1006	.1512	.2133	.2851	.3636	.4457	.5276	.6063	.6790
13	.0003	.0015	.0046	.0113	.0234	.0430	.0721	.1119	.1626	.2237	.2933	.3690	.4478	.5265	.6023
14	.0002	.0009	.0029	.0073	.0156	.0296	.0512	.0818	.1223	.1730	.2330	.3007	.3738	.4497	.5255
15	.0001	.0006	.0018	.0047	.0104	.0203	.0360	.0591	.0909	.1321	.1825	.2414	.3074	.3782	.4514
16	.0001	.0003	.0011	.0030	.0068	.0138	.0251	.0424	.0669	.0996	.1411	.1912	.2491	.3124	.3821
17	.0000	.0002	.0007	.0019	.0045	.0093	.0174	.0301	.0487	.0744	.1079	.1496	.1993	.2562	.3189
18		.0001	.0004	.0012	.0029	.0062	.0120	.0212	.0352	.0550	.0816	.1157	.1575	.2063	.2627
19		.0001	.0003	.0008	.0019	.0042	.0082	.0149	.0252	.0403	.0611	.0885	.1231	.1649	.2137
20		.0000	.0002	.0005	.0013	.0028	.0056	.0103	.0179	.0293	.0453	.0671	.0952	.1301	.1719
21			.0001	.0003	.0008	.0018	.0038	.0071	.0126	.0211	.0334	.0504	.0729	.1016	.1363
22			.0001	.0002	.0005	.0012	.0025	.0049	.0089	.0151	.0244	.0375	.0554	.0786	.1078
23			.0000	.0001	.0003	.0008	.0017	.0034	.0062	.0107	.0177	.0277	.0417	.0603	.0841
24				.0001	.0002	.0005	.0011	.0023	.0043	.0076	.0127	.0203	.0311	.0458	.0651
25				.0001	.0001	.0003	.0008	.0016	.0030	.0053	.0091	.0148	.0231	.0346	.0499
26				.0000	.0001	.0002	.0005	.0010	.0020	.0037	.0065	.0107	.0170	.0259	.0380
27					.0001	.0001	.0003	.0007	.0014	.0026	.0046	.0077	.0124	.0193	.0287
28					.0000	.0001	.0002	.0005	.0010	.0018	.0032	.0055	.0090	.0142	.0216
29						.0001	.0001	.0003	.0006	.0012	.0023	.0039	.0065	.0104	.0161
30						.0000	.0001	.0002	.0004	.0009	.0016	.0028	.0047	.0076	.0119

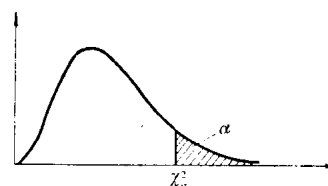
$$P(\chi^2_j > j) = \frac{1}{2^{f/2} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \int_j^\infty z^{\frac{f}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} dz$$



16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	f j
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	2
0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	3
.9999	.9995	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	4
.9958	.9978	.9989	.9994	0.9997	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	5
.9881	.9932	.9962	.9979	.9989	.9994	.9997	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	6
.9733	.9825	.9901	.9942	.9967	.9981	.9990	.9995	.9997	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	7
.9489	.9665	.9786	.9867	.9919	.9951	.9972	.9984	.9991	.9995	.9997	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	8
.9134	.9408	.9597	.9725	.9829	.9902	.9933	.9960	.9976	.9986	.9992	.9995	.9997	0.9999	0.9999	9
.8666	.9026	.9219	.9329	.9482	.9639	.9739	.9833	.9913	.9945	.9967	.9980	.9988	.9993	.9996	10
.8095	.8566	.8944	.9228	.9462	.9628	.9747	.9832	.9900	.9929	.9955	.9972	.9983	.9990	.9994	11
.7440	.8001	.8472	.8856	.9161	.9396	.9574	.9705	.9799	.9866	.9912	.9943	.9964	.9977	.9986	12
.6728	.7362	.7916	.8386	.8774	.9086	.9332	.9520	.9661	.9765	.9840	.9892	.9929	.9954	.9970	13
.5937	.6671	.7291	.7827	.8305	.8696	.9015	.9269	.9463	.9617	.9730	.9813	.9872	.9914	.9943	14
.5246	.5955	.6620	.7226	.7764	.8230	.8622	.8943	.9208	.9414	.9573	.9694	.9784	.9850	.9898	15
.4630	.5228	.5925	.6573	.7166	.7696	.8159	.8553	.8881	.9148	.9362	.9529	.9658	.9755	.9827	16
.3856	.4544	.5231	.5899	.6520	.7111	.7634	.8093	.8487	.8818	.9091	.9311	.9486	.9622	.9726	17
.3239	.3888	.4557	.5224	.5874	.6490	.7060	.7575	.8020	.8424	.8758	.9025	.9261	.9443	.9585	18
.2637	.3285	.3918	.4568	.5218	.5851	.6453	.7012	.7520	.7971	.8364	.8700	.8981	.9212	.9400	19
.2202	.2742	.3328	.3946	.4579	.5218	.5830	.6419	.6963	.7468	.7916	.8308	.8645	.8929	.9165	20
.1785	.2263	.2794	.3363	.3971	.4589	.5207	.5811	.6387	.6926	.7420	.7863	.8253	.8591	.8879	21
.1432	.1847	.2320	.2843	.3405	.3995	.4599	.5200	.5793	.6357	.6887	.7374	.7813	.8202	.8540	22
.1137	.1493	.1906	.2373	.2888	.3440	.4017	.4608	.5198	.5776	.6329	.6850	.7330	.7765	.8153	23
.0895	.1194	.1550	.1962	.2424	.2931	.3472	.4053	.4616	.5194	.5760	.6303	.6815	.7289	.7720	24
.0698	.0947	.1249	.1605	.2014	.2472	.2971	.3503	.4058	.4624	.5190	.5745	.6278	.6782	.7250	25
.0540	.0745	.0993	.1302	.1658	.2064	.2517	.3009	.3532	.4076	.4631	.5186	.5730	.6255	.6751	26
.0415	.0581	.0790	.1047	.1353	.1709	.2112	.2560	.3045	.3559	.4093	.4638	.5182	.5717	.6233	27
.0316	.0449	.0621	.0834	.1094	.1402	.1757	.2158	.2600	.3079	.3585	.4110	.4644	.5179	.5704	28
.0229	.0345	.0484	.0660	.0878	.1140	.1449	.1803	.2201	.2639	.3111	.3609	.4125	.4651	.5176	29
.0180	.0262	.0374	.0518	.0699	.0920	.1185	.1494	.1843	.2242	.2676	.3142	.3632	.4140	.4657	30

5. χ^2 分布的上侧分位数 (χ^2_α) 表

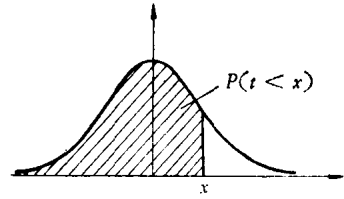
$$P(\chi^2_f > \chi^2_\alpha) = \alpha$$



$f \backslash \alpha$	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001	α
1	0.03157	0.03628	0.03998	0.0458	0.0642	0.148	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.828	1
2	0.0201	0.0404	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.816	2
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345	16.266	3
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	12.277	18.467	4
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.088	20.515	5
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	22.458	6
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322	7
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125	8
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877	9
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588	10
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264	11
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	32.909	12
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	34.528	13
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36.123	14
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37.697	15
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	39.252	16
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.985	33.409	40.790	17
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42.312	18
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	43.820	19
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	45.315	20
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46.797	21
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268	22
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	49.728	23
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179	24
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	52.618	25
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052	26
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55.476	27
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56.893	28
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58.301	29
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	59.703	30

6. t 分 布 表

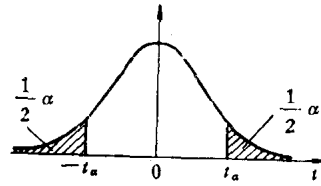
$$P(t < x) = \frac{1}{\sqrt{f}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{f}{2}\right) \int_{-\infty}^x \frac{1}{(1+t^2/f)^{\frac{f+1}{2}}} dt$$



f \ x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	∞	f
0.0	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.6
0.1	.532	.535	.537	.537	.538	.538	.538	.539	.539	.539	.539	.539	.539	.539	.539	.539	.539	.539	.539	.539	0.1
0.2	.563	.570	.573	.574	.575	.576	.576	.577	.577	.577	.577	.578	.578	.578	.578	.578	.578	.578	.578	.578	0.2
0.3	.593	.604	.608	.610	.612	.613	.614	.614	.614	.615	.615	.615	.616	.616	.616	.616	.616	.616	.616	.616	0.3
0.4	.621	.636	.642	.645	.647	.648	.650	.650	.651	.651	.652	.652	.652	.652	.653	.653	.653	.653	.653	.653	0.4
0.5	.648	.667	.674	.678	.681	.683	.684	.685	.686	.686	.686	.687	.687	.688	.688	.688	.688	.688	.688	.689	0.5
0.6	.672	.695	.705	.710	.713	.715	.716	.717	.718	.719	.720	.720	.721	.721	.721	.722	.722	.722	.722	.722	0.6
0.7	.694	.722	.733	.739	.742	.745	.747	.748	.749	.750	.751	.751	.752	.752	.753	.753	.753	.754	.754	.754	0.7
0.8	.715	.746	.759	.766	.770	.773	.775	.777	.778	.779	.780	.780	.781	.781	.782	.782	.783	.783	.783	.783	0.8
0.9	.733	.768	.783	.790	.795	.799	.801	.803	.804	.805	.806	.807	.808	.808	.809	.809	.810	.810	.810	.810	0.9
1.0	.750	.789	.804	.813	.818	.822	.825	.827	.828	.830	.831	.832	.832	.833	.833	.834	.834	.835	.835	.841	1.0
1.1	.765	.807	.824	.834	.839	.843	.846	.848	.850	.851	.853	.854	.854	.855	.856	.856	.857	.857	.857	.864	1.1
1.2	.779	.823	.842	.852	.858	.862	.865	.868	.870	.871	.872	.873	.874	.875	.876	.876	.877	.877	.878	.885	1.2
1.3	.791	.838	.858	.868	.875	.879	.883	.885	.887	.889	.890	.891	.892	.893	.893	.894	.894	.895	.895	.903	1.3
1.4	.803	.852	.872	.883	.890	.894	.898	.900	.902	.904	.905	.907	.908	.908	.909	.910	.910	.911	.911	.919	1.4
1.5	.813	.864	.885	.896	.903	.908	.911	.914	.916	.918	.919	.920	.921	.922	.923	.923	.924	.924	.925	.933	1.5
1.6	.822	.875	.896	.908	.915	.920	.923	.926	.928	.930	.931	.932	.933	.934	.935	.935	.936	.936	.937	.945	1.6
1.7	.831	.884	.906	.918	.925	.930	.934	.936	.938	.940	.941	.943	.944	.945	.945	.946	.946	.947	.947	.955	1.7
1.8	.839	.893	.915	.927	.934	.939	.943	.945	.947	.949	.950	.952	.952	.953	.954	.955	.955	.956	.956	.964	1.8
1.9	.846	.901	.923	.935	.942	.947	.950	.953	.955	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963	.963	.964	.971	1.9
2.0	.852	.908	.930	.942	.949	.954	.957	.960	.962	.963	.965	.966	.967	.967	.968	.969	.969	.970	.970	.977	2.0
2.2	.864	.921	.942	.954	.960	.965	.968	.970	.972	.974	.975	.976	.977	.977	.978	.979	.979	.980	.980	.986	2.2
2.4	.874	.931	.952	.963	.969	.973	.976	.978	.980	.981	.982	.983	.984	.985	.985	.986	.986	.986	.987	.992	2.4
2.6	.883	.938	.960	.970	.976	.980	.982	.984	.986	.987	.988	.988	.989	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.995	2.6
2.8	.891	.946	.966	.976	.981	.984	.987	.988	.990	.991	.991	.992	.992	.993	.993	.994	.994	.994	.994	.997	2.8
3.0	.898	.952	.971	.980	.985	.988	.990	.992	.993	.993	.994	.994	.995	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.999	3.0
3.2	.904	.957	.975	.984	.988	.991	.992	.994	.995	.995	.996	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.998	.998	.999	3.2
3.4	.909	.962	.979	.986	.990	.993	.994	.995	.996	.997	.997	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	1.000	3.4
3.6	.914	.965	.982	.989	.992	.994	.996	.996	.997	.998	.998	.998	.998	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	3.6
3.8	.918	.969	.984	.990	.994	.996	.997	.997	.998	.998	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	3.8
4.0	.922	.971	.986	.992	.995	.996	.997	.998	.998	.999	.999	.999	.999	.999	.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	4.0
4.2	.926	.974	.988	.993	.996	.997	.998	.998	.999	.999	.999	.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	4.2
4.4	.929	.976	.989	.994	.996	.998	.998	.999	.999	.999	.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	4.4
4.6	.932	.978	.990	.995	.997	.998	.999	.999	.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	4.6
4.8	.935	.980	.991	.996	.998	.998	.999	.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	4.8
5.0	.937	.981	.992	.996	.998	.999	.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	5.0
5.2	.940	.982	.993	.997	.998	.999	.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	5.2
5.4	.942	.984	.994	.997	.998	.999	.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	5.4
5.6	.944	.985	.994	.998	.999	.999	.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	5.6
5.8	.946	.986	.995	.998	.999	.999	.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	5.8
6.0	.947	.987	.995	.998	.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	6.0

7. t 分布的双侧分位数 (t_α) 表

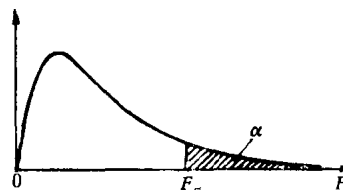
$$P(|t| > t_\alpha) = \alpha$$



$f \backslash \alpha$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001	$\alpha \backslash f$
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619	1
2	.142	.289	.445	.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598	2
3	.137	.277	.424	.584	.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924	3
4	.134	.271	.414	.569	.741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610	4
5	.132	.267	.408	.559	.727	.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859	5
6	.131	.265	.404	.553	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959	6
7	.130	.263	.402	.549	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.993	3.499	5.405	7
8	.130	.262	.399	.546	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041	8
9	.129	.261	.398	.543	.703	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781	9
10	.129	.260	.397	.542	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587	10
11	.129	.260	.396	.540	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437	11
12	.128	.259	.395	.539	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318	12
13	.128	.259	.394	.538	.694	.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221	13
14	.128	.258	.393	.537	.692	.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140	14
15	.128	.258	.393	.536	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073	15
16	.128	.258	.392	.535	.690	.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015	16
17	.128	.257	.392	.534	.689	.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965	17
18	.127	.257	.392	.534	.688	.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922	18
19	.127	.257	.391	.533	.688	.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883	19
20	.127	.257	.391	.533	.687	.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850	20
21	.127	.257	.391	.532	.686	.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819	21
22	.127	.256	.390	.532	.686	.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792	22
23	.127	.256	.390	.532	.685	.853	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767	23
24	.127	.256	.390	.531	.685	.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745	24
25	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725	25
26	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707	26
27	.127	.256	.389	.531	.684	.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690	27
28	.127	.256	.389	.530	.683	.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674	28
29	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659	29
30	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646	30
40	.126	.255	.388	.529	.681	.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551	40
60	.126	.254	.387	.527	.679	.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460	60
120	.126	.254	.386	.526	.677	.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373	120
∞	.126	.253	.385	.524	.674	.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291	∞

8. F 检验的临界值 (F_{α}) 表

$$P(F > F_{\alpha}) = \alpha$$



$\alpha = 0.10$

$f_2 \backslash f_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	50	100	200	500	∞	$f_1 \backslash f_2$
1	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	61.2	61.7	62.3	62.7	63.0	63.2	63.3	63.3	1
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.42	9.44	9.46	9.47	9.48	9.49	9.49	9.49	2
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.20	5.18	5.17	5.15	5.14	5.14	5.14	5.13	3
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.87	3.84	3.82	3.80	3.78	3.77	3.76	3.76	4
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.24	3.21	3.17	3.15	3.13	3.12	3.11	3.10	5
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.87	2.84	2.80	2.77	2.75	2.73	2.73	2.72	6
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.63	2.59	2.56	2.52	2.50	2.48	2.48	2.47	7
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.46	2.42	2.38	2.35	2.32	2.31	2.30	2.29	8
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.34	2.30	2.25	2.22	2.19	2.17	2.17	2.16	9
10	3.28	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.24	2.20	2.16	2.12	2.09	2.07	2.06	2.06	10
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.17	2.12	2.08	2.04	2.00	1.99	1.93	1.97	11
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.10	2.06	2.01	1.97	1.94	1.92	1.91	1.90	12
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.05	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.85	1.85	13
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.01	1.96	1.91	1.87	1.83	1.82	1.80	1.80	14
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	1.97	1.92	1.87	1.83	1.79	1.77	1.76	1.76	15
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.94	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.73	1.72	16
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.91	1.86	1.81	1.76	1.73	1.71	1.69	1.69	17
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.89	1.84	1.78	1.74	1.70	1.68	1.67	1.66	18
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.86	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.64	1.63	19
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.62	1.61	20
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.81	1.76	1.70	1.65	1.61	1.59	1.58	1.57	22
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.99	1.94	1.91	1.88	1.78	1.73	1.67	1.62	1.58	1.56	1.54	1.53	24
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.76	1.71	1.65	1.59	1.55	1.53	1.51	1.50	26
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.74	1.69	1.63	1.57	1.53	1.50	1.49	1.48	28
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.99	1.93	1.88	1.85	1.82	1.72	1.67	1.61	1.55	1.51	1.48	1.47	1.46	30
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.66	1.61	1.54	1.48	1.43	1.41	1.39	1.38	40
50	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76	1.73	1.63	1.57	1.50	1.44	1.39	1.36	1.34	1.33	50
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.60	1.54	1.48	1.41	1.36	1.33	1.31	1.29	60
80	2.77	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.71	1.68	1.57	1.51	1.44	1.38	1.32	1.28	1.26	1.24	80
100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.70	1.66	1.56	1.49	1.42	1.35	1.29	1.26	1.23	1.21	100
200	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63	1.52	1.46	1.38	1.31	1.24	1.20	1.17	1.14	200
500	2.72	2.31	2.10	1.96	1.86	1.79	1.73	1.68	1.64	1.61	1.50	1.44	1.36	1.28	1.21	1.16	1.12	1.09	500
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.49	1.42	1.34	1.26	1.18	1.13	1.08	1.00	∞

$\alpha=0.05$

f_1																		f_1
f_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20		f_2	
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	245	246	247	248		1	
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4		2	
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.71	8.69	8.67	8.66		3	
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.87	5.84	5.82	5.80		4	
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.64	4.60	4.58	4.56		5	
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.96	3.92	3.90	3.87		6	
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.53	3.49	3.47	3.44		7	
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.24	3.20	3.17	3.15		8	
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.03	2.99	2.96	2.94		9	
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.86	2.83	2.80	2.77		10	
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.74	2.70	2.67	2.65		11	
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.64	2.60	2.57	2.54		12	
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.55	2.51	2.48	2.46		13	
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.48	2.44	2.41	2.39		14	
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.42	2.38	2.35	2.33		15	
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.37	2.33	2.30	2.28		16	
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.33	2.29	2.26	2.23		17	
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.29	2.25	2.22	2.19		18	
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.26	2.21	2.18	2.16		19	
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.22	2.18	2.15	2.12		20	
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.20	2.16	2.12	2.10		21	
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.17	2.13	2.10	2.07		22	
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.15	2.11	2.07	2.05		23	
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.13	2.09	2.05	2.03		24	
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.11	2.07	2.04	2.01		25	
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.09	2.05	2.02	1.99		26	
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.97		27	
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.06	2.02	1.99	1.96		28	
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.05	2.01	1.97	1.94		29	
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.04	1.99	1.96	1.93		30	
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.07	2.01	1.97	1.94	1.91		32	
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89		34	
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.43	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	2.03	1.98	1.93	1.90	1.87		36	
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.02	1.96	1.92	1.88	1.85		38	
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.95	1.90	1.87	1.84		40	
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83		42	
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.05	1.98	1.92	1.88	1.84	1.81		44	
46	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.15	2.09	2.04	1.97	1.91	1.87	1.83	1.80		46	
48	4.04	3.19	2.80	2.57	2.41	2.29	2.21	2.14	2.08	2.03	1.96	1.90	1.86	1.82	1.79		48	
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.95	1.89	1.85	1.81	1.78		50	
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.86	1.82	1.78	1.75		60	
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.88	1.82	1.77	1.73	1.70		80	
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.85	1.79	1.75	1.71	1.68		100	
125	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.96	1.91	1.83	1.77	1.72	1.69	1.66		125	
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.82	1.76	1.71	1.67	1.64		150	
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.80	1.74	1.69	1.66	1.62		200	
300	3.87	3.03	2.63	2.40	2.24	2.13	2.04	1.97	1.91	1.86	1.78	1.72	1.68	1.64	1.61		300	
500	3.86	3.01	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.77	1.71	1.66	1.62	1.59		500	
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84	1.76	1.70	1.65	1.61	1.58		1000	
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.69	1.64	1.60	1.57		∞	

$\alpha = 0.05$

$f_1 \backslash f_2$	22	24	26	28	30	35	40	45	50	60	80	100	200	500	∞	f_1
1	249	249	249	250	250	251	251	251	252	252	252	253	254	254	254	1
2	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	2
3	8.65	8.64	8.63	8.62	8.62	8.60	8.59	8.59	8.58	8.57	8.56	8.55	8.54	8.53	8.53	3
4	5.79	5.77	5.76	5.75	5.75	5.73	5.72	5.71	5.70	5.69	5.67	5.66	5.65	5.64	5.63	4
5	4.54	4.53	4.52	4.50	4.50	4.48	4.46	4.45	4.44	4.43	4.41	4.41	4.39	4.37	4.37	5
6	3.86	3.84	3.83	3.82	3.81	3.79	3.77	3.76	3.75	3.74	3.72	3.71	3.69	3.68	3.67	6
7	3.43	3.41	3.40	3.39	3.38	3.36	3.34	3.33	3.32	3.30	3.29	3.27	3.25	3.24	3.23	7
8	3.13	3.12	3.10	3.09	3.08	3.06	3.04	3.03	3.02	3.01	2.99	2.97	2.95	2.94	2.93	8
9	2.92	2.90	2.89	2.87	2.86	2.84	2.83	2.81	2.80	2.79	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71	9
10	2.75	2.74	2.72	2.71	2.70	2.68	2.66	2.65	2.64	2.62	2.60	2.59	2.56	2.55	2.54	10
11	2.63	2.61	2.59	2.58	2.57	2.55	2.53	2.52	2.51	2.49	2.47	2.46	2.43	2.42	2.40	11
12	2.52	2.51	2.49	2.48	2.47	2.44	2.43	2.41	2.40	2.38	2.36	2.35	2.32	2.31	2.30	12
13	2.44	2.42	2.41	2.39	2.38	2.36	2.34	2.33	2.31	2.30	2.27	2.26	2.23	2.22	2.21	13
14	2.37	2.35	2.33	2.32	2.31	2.28	2.27	2.25	2.24	2.22	2.20	2.19	2.16	2.14	2.13	14
15	2.31	2.29	2.27	2.26	2.25	2.22	2.20	2.19	2.18	2.16	2.14	2.12	2.10	2.08	2.07	15
16	2.25	2.24	2.22	2.21	2.19	2.17	2.15	2.14	2.12	2.11	2.08	2.07	2.04	2.02	2.01	16
17	2.21	2.19	2.17	2.16	2.15	2.12	2.10	2.09	2.08	2.06	2.03	2.02	1.99	1.97	1.96	17
18	2.17	2.15	2.13	2.12	2.11	2.08	2.06	2.05	2.04	2.02	1.99	1.98	1.95	1.93	1.92	18
19	2.13	2.11	2.10	2.08	2.07	2.05	2.03	2.01	2.00	1.98	1.96	1.94	1.91	1.89	1.88	19
20	2.10	2.08	2.07	2.05	2.04	2.01	1.99	1.98	1.97	1.95	1.92	1.91	1.88	1.86	1.84	20
21	2.07	2.05	2.04	2.02	2.01	1.98	1.96	1.95	1.94	1.92	1.89	1.88	1.84	1.82	1.81	21
22	2.05	2.03	2.01	2.00	1.98	1.96	1.94	1.92	1.91	1.89	1.86	1.85	1.82	1.80	1.78	22
23	2.02	2.00	1.99	1.97	1.96	1.93	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	1.82	1.79	1.77	1.76	23
24	2.00	1.98	1.97	1.95	1.94	1.91	1.89	1.88	1.86	1.84	1.82	1.80	1.77	1.75	1.73	24
25	1.98	1.96	1.95	1.93	1.92	1.89	1.87	1.86	1.84	1.82	1.80	1.78	1.75	1.73	1.71	25
26	1.97	1.95	1.93	1.91	1.90	1.87	1.85	1.84	1.82	1.80	1.78	1.76	1.73	1.71	1.69	26
27	1.95	1.93	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	1.82	1.81	1.79	1.76	1.74	1.71	1.69	1.67	27
28	1.93	1.91	1.90	1.88	1.87	1.84	1.82	1.80	1.79	1.77	1.74	1.73	1.69	1.67	1.65	28
29	1.92	1.90	1.88	1.87	1.85	1.83	1.81	1.79	1.77	1.75	1.73	1.71	1.67	1.65	1.64	29
30	1.91	1.89	1.87	1.85	1.84	1.81	1.79	1.77	1.76	1.74	1.71	1.70	1.66	1.64	1.62	30
32	1.88	1.86	1.85	1.83	1.82	1.79	1.77	1.75	1.74	1.71	1.69	1.67	1.63	1.61	1.59	32
34	1.86	1.84	1.82	1.80	1.80	1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.66	1.65	1.61	1.59	1.57	34
36	1.85	1.82	1.81	1.79	1.78	1.75	1.73	1.71	1.69	1.67	1.64	1.62	1.59	1.56	1.55	36
38	1.83	1.81	1.79	1.77	1.76	1.73	1.71	1.69	1.68	1.65	1.62	1.61	1.57	1.54	1.53	38
40	1.81	1.79	1.77	1.76	1.74	1.72	1.69	1.67	1.66	1.64	1.61	1.59	1.55	1.53	1.51	40
42	1.80	1.78	1.76	1.74	1.73	1.70	1.68	1.66	1.65	1.62	1.59	1.57	1.53	1.51	1.49	42
44	1.79	1.77	1.75	1.73	1.72	1.69	1.67	1.65	1.63	1.61	1.58	1.56	1.52	1.49	1.48	44
46	1.78	1.76	1.74	1.72	1.71	1.68	1.65	1.64	1.62	1.60	1.57	1.55	1.51	1.48	1.46	46
48	1.77	1.75	1.73	1.71	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.59	1.56	1.54	1.49	1.47	1.45	48
50	1.76	1.74	1.72	1.70	1.69	1.66	1.63	1.61	1.60	1.58	1.54	1.52	1.48	1.46	1.44	50
60	1.72	1.70	1.68	1.66	1.65	1.62	1.59	1.57	1.56	1.53	1.50	1.48	1.44	1.41	1.39	60
80	1.63	1.65	1.63	1.62	1.60	1.57	1.54	1.52	1.51	1.48	1.45	1.43	1.38	1.35	1.32	80
100	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.54	1.52	1.49	1.48	1.45	1.41	1.39	1.34	1.31	1.28	100
125	1.63	1.60	1.58	1.57	1.55	1.52	1.49	1.47	1.45	1.42	1.39	1.36	1.31	1.27	1.25	125
150	1.61	1.59	1.57	1.55	1.53	1.50	1.48	1.45	1.44	1.41	1.37	1.34	1.29	1.25	1.22	150
200	1.60	1.57	1.55	1.53	1.52	1.48	1.46	1.43	1.41	1.39	1.35	1.32	1.26	1.22	1.19	200
300	1.58	1.55	1.53	1.51	1.50	1.46	1.43	1.41	1.39	1.36	1.32	1.30	1.23	1.19	1.15	300
500	1.56	1.54	1.52	1.50	1.48	1.45	1.42	1.40	1.38	1.34	1.30	1.28	1.21	1.16	1.11	500
1000	1.55	1.53	1.51	1.49	1.47	1.44	1.41	1.38	1.36	1.33	1.29	1.26	1.19	1.13	1.08	1000
∞	1.54	1.52	1.50	1.48	1.46	1.42	1.39	1.37	1.35	1.32	1.27	1.24	1.17	1.11	1.00	∞

$\alpha=0.01$

$f_1 \backslash f_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	$f_2 \backslash f_1$
1	405	500	540	563	576	586	593	598	602	606	611	614	617	619	621	1
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	2
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.8	26.8	26.7	3
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.2	14.1	14.0	4
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.77	9.68	9.61	9.55	5
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.93	7.87	7.72	7.60	7.52	7.45	7.40	6
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.36	6.27	6.21	6.16	7
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.56	5.48	5.41	5.36	8
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	5.00	4.92	4.86	4.81	9
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.60	4.52	4.46	4.41	10
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.29	4.21	4.15	4.10	11
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.05	3.97	3.91	3.86	12
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.86	3.78	3.71	3.66	13
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.70	3.62	3.56	3.51	14
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.56	3.49	3.42	3.37	15
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.45	3.37	3.31	3.26	16
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.45	3.35	3.27	3.21	3.16	17
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.27	3.19	3.13	3.08	18
19	8.13	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.19	3.12	3.05	3.00	19
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.13	3.05	2.99	2.94	20
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.07	2.99	2.93	2.88	21
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	3.02	2.94	2.88	2.83	22
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.97	2.89	2.83	2.78	23
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.93	2.85	2.79	2.74	24
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.89	2.81	2.75	2.70	25
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.86	2.78	2.72	2.66	26
27	7.63	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.82	2.75	2.69	2.63	27
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.79	2.72	2.65	2.60	28
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.77	2.69	2.63	2.57	29
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.74	2.66	2.60	2.55	30
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02	2.93	2.80	2.70	2.62	2.55	2.50	32
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98	2.89	2.76	2.66	2.58	2.51	2.46	34
36	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95	2.86	2.72	2.62	2.54	2.48	2.43	36
33	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92	2.83	2.69	2.59	2.51	2.45	2.40	33
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.56	2.48	2.42	2.37	40
42	7.23	5.15	4.29	3.80	3.49	3.27	3.10	2.97	2.86	2.78	2.64	2.54	2.46	2.40	2.34	42
44	7.25	5.12	4.26	3.78	3.47	3.24	3.08	2.95	2.84	2.75	2.62	2.52	2.44	2.37	2.32	44
46	7.22	5.10	4.24	3.76	3.44	3.22	3.06	2.93	2.82	2.73	2.60	2.50	2.42	2.35	2.30	46
48	7.20	5.08	4.22	3.74	3.43	3.20	3.04	2.91	2.80	2.72	2.58	2.48	2.40	2.33	2.28	48
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.79	2.70	2.56	2.46	2.38	2.32	2.27	50
60	7.08	4.93	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.39	2.31	2.25	2.20	60
80	6.93	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.42	2.31	2.23	2.17	2.12	80
100	6.90	4.82	3.93	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50	2.37	2.26	2.19	2.12	2.07	100
125	6.84	4.78	3.94	3.47	3.17	2.95	2.79	2.66	2.55	2.47	2.33	2.23	2.15	2.03	2.03	125
150	6.81	4.75	3.92	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53	2.44	2.31	2.20	2.12	2.03	2.00	150
200	6.76	4.71	3.83	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.27	2.17	2.09	2.02	1.97	200
300	6.72	4.63	3.85	3.38	3.08	2.86	2.70	2.57	2.47	2.38	2.24	2.14	2.06	1.99	1.94	300
500	6.69	4.65	3.82	3.36	3.05	2.84	2.68	2.55	2.44	2.36	2.22	2.12	2.04	1.97	1.92	500
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34	2.20	2.10	2.02	1.95	1.90	1000
∞	6.63	4.61	3.73	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.08	2.00	1.93	1.88	∞

$\alpha=0.01$

$f_1 \backslash f_2$	22	24	26	28	30	35	40	45	50	60	80	100	200	500	∞	$f_2 \backslash f_1$
1	622	623	624	625	626	623	629	630	630	631	633	633	635	636	637	1
2	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	2
3	26.6	26.6	26.6	26.5	26.5	26.5	26.4	26.4	26.4	26.3	26.3	26.2	26.2	26.1	26.1	3
4	14.0	13.9	13.9	13.9	13.8	13.8	13.7	13.7	13.7	13.7	13.6	13.6	13.5	13.5	13.5	4
5	9.51	9.47	9.43	9.40	9.38	9.33	9.29	9.26	9.24	9.20	9.16	9.13	9.03	9.04	9.02	5
6	7.35	7.31	7.28	7.25	7.23	7.18	7.14	7.11	7.09	7.06	7.01	6.99	6.93	6.90	6.88	6
7	6.11	6.07	6.04	6.02	5.99	5.94	5.91	5.88	5.86	5.82	5.78	5.75	5.70	5.67	5.65	7
8	5.32	5.23	5.25	5.22	5.20	5.15	5.12	5.00	5.07	5.03	4.99	4.96	4.91	4.83	4.86	8
9	4.77	4.73	4.70	4.67	4.65	4.60	4.57	4.54	4.52	4.43	4.44	4.42	4.36	4.33	4.31	9
10	4.36	4.33	4.30	4.27	4.25	4.20	4.17	4.14	4.12	4.03	4.04	4.01	3.96	3.93	3.91	10
11	4.06	4.02	3.99	3.96	3.94	3.89	3.86	3.83	3.81	3.78	3.73	3.71	3.66	3.62	3.60	11
12	3.82	3.73	3.75	3.72	3.70	3.65	3.62	3.59	3.57	3.54	3.49	3.47	3.41	3.38	3.36	12
13	3.62	3.59	3.56	3.53	3.51	3.46	3.43	3.40	3.38	3.34	3.30	3.27	3.22	3.19	3.17	13
14	3.46	3.43	3.40	3.37	3.35	3.30	3.27	3.24	3.22	3.18	3.14	3.11	3.06	3.03	3.00	14
15	3.33	3.29	3.26	3.24	3.21	3.17	3.13	3.10	3.08	3.05	3.00	2.98	2.92	2.89	2.87	15
16	3.22	3.13	3.15	3.12	3.10	3.05	3.02	2.99	2.97	2.93	2.89	2.86	2.81	2.78	2.75	16
17	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.96	2.92	2.89	2.87	2.83	2.79	2.76	2.71	2.68	2.65	17
18	3.03	3.00	2.97	2.94	2.92	2.87	2.84	2.81	2.78	2.75	2.70	2.63	2.62	2.59	2.57	18
19	2.96	2.92	2.89	2.87	2.84	2.80	2.76	2.73	2.71	2.67	2.63	2.60	2.55	2.51	2.49	19
20	2.90	2.86	2.83	2.80	2.78	2.73	2.69	2.67	2.64	2.61	2.56	2.54	2.43	2.44	2.42	20
21	2.84	2.80	2.77	2.74	2.72	2.67	2.64	2.61	2.58	2.55	2.50	2.43	2.42	2.33	2.36	21
22	2.78	2.75	2.72	2.69	2.67	2.62	2.53	2.55	2.53	2.50	2.45	2.42	2.36	2.33	2.31	22
23	2.74	2.70	2.67	2.64	2.62	2.57	2.54	2.51	2.43	2.45	2.40	2.37	2.32	2.23	2.26	23
24	2.70	2.66	2.63	2.60	2.58	2.53	2.49	2.46	2.44	2.40	2.36	2.33	2.27	2.24	2.21	24
25	2.66	2.62	2.59	2.56	2.54	2.49	2.45	2.42	2.40	2.36	2.32	2.29	2.23	2.19	2.17	25
26	2.62	2.58	2.55	2.53	2.50	2.45	2.42	2.39	2.36	2.33	2.28	2.25	2.19	2.16	2.13	26
27	2.59	2.55	2.52	2.49	2.47	2.42	2.38	2.35	2.33	2.29	2.25	2.22	2.16	2.12	2.10	27
28	2.56	2.52	2.49	2.46	2.44	2.39	2.35	2.32	2.30	2.26	2.22	2.19	2.13	2.09	2.06	28
29	2.53	2.49	2.46	2.44	2.41	2.36	2.33	2.30	2.27	2.23	2.19	2.16	2.10	2.06	2.03	29
30	2.51	2.47	2.44	2.41	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.16	2.13	2.07	2.03	2.01	30
32	2.46	2.42	2.39	2.36	2.34	2.29	2.25	2.22	2.20	2.16	2.11	2.03	2.02	1.93	1.96	32
34	2.42	2.38	2.35	2.32	2.30	2.25	2.21	2.18	2.16	2.12	2.07	2.04	1.93	1.94	1.91	34
36	2.33	2.35	2.32	2.29	2.26	2.21	2.17	2.14	2.12	2.08	2.03	2.00	1.94	1.90	1.87	36
38	2.35	2.32	2.28	2.26	2.23	2.18	2.14	2.11	2.09	2.05	2.00	1.97	1.90	1.86	1.84	38
40	2.33	2.29	2.26	2.23	2.20	2.15	2.11	2.08	2.06	2.02	1.97	1.94	1.87	1.83	1.80	40
42	2.30	2.26	2.23	2.20	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.91	1.85	1.80	1.78	42
44	2.23	2.24	2.21	2.13	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.97	1.92	1.89	1.82	1.78	1.75	44
46	2.26	2.22	2.19	2.16	2.13	2.03	2.04	2.01	1.99	1.95	1.90	1.86	1.80	1.75	1.73	46
48	2.24	2.20	2.17	2.14	2.12	2.06	2.02	1.99	1.97	1.93	1.83	1.84	1.73	1.73	1.70	48
50	2.22	2.18	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.97	1.95	1.91	1.86	1.82	1.76	1.71	1.63	50
60	2.15	2.12	2.03	2.05	2.03	1.98	1.94	1.90	1.83	1.84	1.73	1.75	1.63	1.63	1.60	60
80	2.07	2.03	2.00	1.97	1.94	1.89	1.85	1.81	1.79	1.75	1.69	1.66	1.53	1.53	1.49	80
100	2.02	1.98	1.94	1.92	1.89	1.84	1.80	1.76	1.73	1.69	1.63	1.69	1.52	1.47	1.43	100
125	1.93	1.94	1.91	1.83	1.85	1.80	1.76	1.72	1.69	1.65	1.59	1.55	1.47	1.41	1.37	125
150	1.96	1.92	1.83	1.85	1.83	1.77	1.73	1.69	1.66	1.62	1.56	1.52	1.43	1.33	1.33	150
200	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.58	1.52	1.43	1.39	1.33	1.23	200
300	1.89	1.85	1.82	1.79	1.76	1.71	1.66	1.62	1.59	1.55	1.43	1.44	1.35	1.23	1.22	300
500	1.87	1.83	1.79	1.76	1.74	1.63	1.63	1.60	1.56	1.52	1.45	1.41	1.31	1.23	1.16	500
1000	1.85	1.81	1.77	1.74	1.72	1.66	1.61	1.57	1.54	1.50	1.43	1.33	1.23	1.19	1.11	1000
∞	1.83	1.79	1.76	1.72	1.70	1.64	1.59	1.55	1.52	1.47	1.40	1.36	1.25	1.15	1.00	∞

9. 非中心 F 分布的非中心参数表
(表中给出非中心参数的平方根 ψ 的数值)

$\alpha=0.05 \quad \beta=0.30$

$f_1 \backslash f_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	f_1 f_2
2	4.86	4.80	4.78	4.77	4.77	4.76	4.76	4.76	4.75	4.75	4.75	4.75	4.75	4.74	4.74	4.74	4.74	4.74	4.74	2
4	3.31	2.96	2.81	2.73	2.68	2.64	2.61	2.59	2.57	2.56	2.54	2.51	2.49	2.48	2.47	2.46	2.45	2.43	2.42	4
6	2.98	2.56	2.38	2.27	2.20	2.15	2.11	2.09	2.06	2.04	2.01	1.98	1.95	1.94	1.92	1.90	1.89	1.87	1.85	6
8	2.83	2.39	2.19	2.07	1.99	1.94	1.89	1.86	1.83	1.81	1.78	1.74	1.70	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.58	8
10	2.76	2.29	2.08	1.96	1.87	1.81	1.77	1.73	1.70	1.68	1.64	1.60	1.56	1.53	1.51	1.49	1.46	1.44	1.41	10
12	2.71	2.23	2.02	1.89	1.80	1.74	1.69	1.65	1.62	1.59	1.55	1.51	1.46	1.44	1.41	1.39	1.36	1.33	1.30	12
14	2.67	2.19	1.97	1.84	1.75	1.68	1.63	1.59	1.56	1.53	1.48	1.44	1.39	1.37	1.34	1.31	1.28	1.25	1.21	14
16	2.65	2.16	1.93	1.80	1.71	1.64	1.59	1.54	1.51	1.48	1.44	1.39	1.34	1.31	1.28	1.25	1.22	1.18	1.15	16
18	2.63	2.14	1.91	1.77	1.68	1.61	1.55	1.51	1.48	1.45	1.40	1.35	1.30	1.27	1.24	1.21	1.17	1.13	1.09	18
20	2.61	2.12	1.89	1.75	1.65	1.58	1.53	1.48	1.45	1.42	1.37	1.32	1.26	1.24	1.20	1.16	1.13	1.09	1.05	20
24	2.59	2.09	1.86	1.72	1.62	1.55	1.49	1.44	1.41	1.37	1.33	1.27	1.21	1.18	1.15	1.10	1.07	1.02	0.98	24
30	2.57	2.06	1.83	1.68	1.58	1.51	1.45	1.40	1.36	1.33	1.28	1.22	1.16	1.12	1.09	1.04	1.00	0.96	0.90	30
40	2.55	2.03	1.80	1.66	1.55	1.47	1.41	1.36	1.32	1.29	1.24	1.18	1.11	1.07	1.03	0.98	0.94	0.88	0.82	40
60	2.53	2.01	1.77	1.62	1.51	1.43	1.37	1.32	1.28	1.25	1.19	1.12	1.05	1.01	0.97	0.91	0.86	0.80	0.71	60
120	2.50	1.98	1.74	1.59	1.48	1.39	1.34	1.29	1.24	1.21	1.15	1.07	0.99	0.95	0.88	0.84	0.78	0.70	0.58	120
∞	2.49	1.96	1.71	1.56	1.45	1.36	1.30	1.24	1.20	1.16	1.09	1.02	0.94	0.89	0.83	0.76	0.68	0.56	0.00	∞

$\alpha=0.05 \quad \beta=0.20$

$f_1 \backslash f_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	f_1 f_2
2	5.65	5.53	5.56	5.55	5.54	5.54	5.53	5.53	5.53	5.53	5.52	5.52	5.52	5.52	5.52	5.52	5.51	5.51	5.51	2
4	3.76	3.35	3.18	3.08	3.02	2.93	2.94	2.92	2.90	2.88	2.86	2.83	2.81	2.80	2.78	2.76	2.75	2.74	2.73	4
6	3.37	2.88	2.67	2.54	2.46	2.40	2.36	2.33	2.30	2.28	2.25	2.21	2.17	2.15	2.14	2.12	2.10	2.08	2.06	6
8	3.20	2.63	2.45	2.31	2.22	2.16	2.11	2.07	2.04	2.01	1.97	1.93	1.89	1.87	1.84	1.82	1.79	1.77	1.74	8
10	3.11	2.57	2.33	2.18	2.09	2.01	1.96	1.92	1.89	1.86	1.81	1.77	1.72	1.69	1.67	1.64	1.61	1.58	1.55	10
12	3.05	2.50	2.25	2.10	2.00	1.93	1.87	1.82	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.58	1.55	1.52	1.49	1.46	1.42	12
14	3.01	2.45	2.20	2.04	1.94	1.86	1.80	1.76	1.72	1.69	1.64	1.59	1.53	1.50	1.47	1.44	1.40	1.37	1.33	14
16	2.98	2.42	2.16	2.00	1.90	1.82	1.76	1.71	1.67	1.64	1.58	1.53	1.47	1.44	1.41	1.37	1.33	1.29	1.25	16
18	2.96	2.39	2.13	1.97	1.86	1.78	1.72	1.67	1.63	1.60	1.54	1.49	1.42	1.39	1.36	1.32	1.28	1.24	1.19	18
20	2.95	2.37	2.10	1.94	1.83	1.75	1.69	1.64	1.60	1.56	1.51	1.45	1.39	1.35	1.32	1.28	1.24	1.19	1.14	20
24	2.92	2.34	2.07	1.91	1.79	1.71	1.65	1.59	1.55	1.51	1.46	1.40	1.33	1.30	1.25	1.22	1.17	1.12	1.07	24
30	2.90	2.31	2.04	1.87	1.75	1.67	1.60	1.55	1.50	1.47	1.41	1.34	1.27	1.24	1.19	1.14	1.10	1.04	0.98	30
40	2.87	2.23	2.00	1.83	1.72	1.63	1.56	1.51	1.46	1.42	1.35	1.29	1.21	1.17	1.13	1.07	1.02	0.95	0.89	40
60	2.85	2.25	1.97	1.80	1.68	1.59	1.52	1.46	1.41	1.37	1.31	1.23	1.15	1.10	1.06	1.00	0.94	0.86	0.77	60
120	2.83	2.22	1.94	1.77	1.64	1.55	1.48	1.41	1.37	1.32	1.26	1.18	1.09	1.04	0.99	0.92	0.85	0.75	0.62	120
∞	2.80	2.20	1.91	1.73	1.60	1.51	1.43	1.37	1.32	1.27	1.20	1.12	1.02	0.97	0.90	0.83	0.74	0.61	0.00	∞

$\alpha=0.05 \quad \beta=0.10$

$f_1 \backslash f_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	f_1 f_2
2	6.30	6.71	6.63	6.67	6.66	6.65	6.65	6.65	6.64	6.64	6.64	6.64	6.63	6.63	6.63	6.63	6.63	6.63	6.62	2
4	4.40	3.90	3.69	3.53	3.50	3.45	3.41	3.33	3.36	3.34	3.31	3.28	3.25	3.23	3.22	3.20	3.19	3.17	3.15	4
6	3.91	3.32	3.07	2.92	2.83	2.76	2.71	2.67	2.64	2.61	2.57	2.53	2.49	2.46	2.44	2.42	2.40	2.37	2.35	6
8	3.71	3.08	2.81	2.64	2.54	2.46	2.40	2.35	2.32	2.29	2.24	2.19	2.14	2.12	2.09	2.06	2.03	2.00	1.97	8
10	3.60	2.95	2.66	2.49	2.37	2.29	2.23	2.13	2.14	2.11	2.05	2.00	1.94	1.91	1.88	1.85	1.82	1.78	1.75	10
12	3.54	2.87	2.57	2.39	2.27	2.19	2.12	2.07	2.02	1.99	1.93	1.88	1.81	1.78	1.75	1.71	1.68	1.64	1.60	12
14	3.49	2.82	2.51	2.33	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.91	1.85	1.79	1.72	1.69	1.65	1.61	1.57	1.53	1.49	14
16	3.46	2.77	2.46	2.23	2.15	2.06	1.99	1.93	1.83	1.85	1.79	1.72	1.65	1.62	1.58	1.54	1.49	1.45	1.40	16
18	3.43	2.74	2.43	2.21	2.11	2.02	1.94	1.89	1.84	1.80	1.74	1.67	1.60	1.56	1.52	1.48	1.43	1.38	1.33	18
20	3.41	2.72	2.40	2.21	2.08	1.98	1.91	1.85	1.80	1.76	1.70	1.63	1.55	1.51	1.47	1.43	1.33	1.33	1.27	20
24	3.38	2.68	2.36	2.17	2.03	1.94	1.86	1.80	1.75	1.71	1.64	1.57	1.49	1.45	1.40	1.36	1.30	1.24	1.13	24
30	3.35	2.65	2.32	2.12	1.99	1.89	1.81	1.75	1.70	1.65	1.53	1.51	1.42	1.38	1.33	1.23	1.22	1.16	1.09	30
40	3.32	2.61	2.23	2.03	1.94	1.84	1.76	1.70	1.64	1.60	1.52	1.44	1.35	1.30	1.25	1.20	1.13	1.06	0.93	40
60	3.29	2.58	2.24	2.04	1.90	1.79	1.71	1.64	1.59	1.54	1.47	1.38	1.23	1.23	1.18	1.11	1.04	0.95	0.85	60
120	3.27	2.55	2.21	2.00	1.86	1.75	1.66	1.59	1.54	1.49	1.41	1.32	1.22	1.16	1.09	1.02	0.93	0.83	0.68	120
∞	3.24	2.51	2.17	1.96	1.81	1.70	1.62	1.54	1.48	1.43	1.35	1.26	1.15	1.08	1.01	0.92	0.82	0.67	0.00	∞

$\alpha=0.01 \quad \beta=0.30$

$f_1 \backslash f_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	f_1 f_2	
2	10.95	10.93	10.92	10.91	10.91	10.91	10.91	10.91	10.91	10.91	10.90	10.90	10.90	10.90	10.90	10.90	10.90	10.90	10.90	10.90	2
4	5.25	4.73	4.50	4.38	4.30	4.24	4.20	4.17	4.15	4.13	4.10	4.06	4.03	4.01	4.00	3.98	3.96	3.94	3.93	4	
6	4.30	3.69	3.43	3.28	3.18	3.12	3.06	3.02	2.99	2.97	2.93	2.88	2.84	2.82	2.80	2.77	2.75	2.72	2.70	6	
8	3.92	3.29	3.01	2.85	2.74	2.67	2.61	2.56	2.53	2.50	2.45	2.40	2.35	2.33	2.30	2.27	2.25	2.22	2.19	8	
10	3.73	3.08	2.79	2.62	2.51	2.43	2.37	2.32	2.28	2.25	2.20	2.14	2.09	2.06	2.03	2.00	1.97	1.93	1.90	10	
12	3.60	2.95	2.65	2.48	2.36	2.28	2.21	2.16	2.12	2.09	2.03	1.98	1.92	1.89	1.85	1.82	1.79	1.75	1.71	12	
14	3.52	2.86	2.56	2.38	2.26	2.17	2.11	2.06	2.01	1.98	1.92	1.86	1.80	1.77	1.73	1.70	1.66	1.62	1.58	14	
16	3.46	2.80	2.49	2.31	2.19	2.10	2.03	1.98	1.93	1.90	1.84	1.78	1.71	1.68	1.64	1.60	1.56	1.52	1.47	16	
18	3.42	2.75	2.44	2.26	2.14	2.05	1.97	1.92	1.87	1.84	1.78	1.71	1.65	1.61	1.57	1.53	1.49	1.44	1.39	18	
20	3.38	2.71	2.40	2.22	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.73	1.66	1.59	1.56	1.51	1.47	1.43	1.38	1.33	20	
24	3.33	2.65	2.34	2.16	2.03	1.93	1.86	1.80	1.76	1.72	1.66	1.59	1.52	1.47	1.42	1.38	1.33	1.29	1.22	24	
30	3.28	2.60	2.29	2.10	1.97	1.87	1.80	1.74	1.69	1.65	1.58	1.51	1.43	1.39	1.34	1.30	1.24	1.18	1.12	30	
40	3.24	2.55	2.24	2.05	1.91	1.82	1.73	1.68	1.62	1.57	1.51	1.44	1.35	1.31	1.26	1.21	1.14	1.07	1.00	40	
60	3.19	2.50	2.18	1.99	1.85	1.75	1.67	1.61	1.56	1.51	1.44	1.36	1.27	1.23	1.17	1.10	1.04	0.96	0.86	60	
120	3.14	2.45	2.13	1.93	1.80	1.70	1.61	1.55	1.49	1.45	1.37	1.28	1.19	1.13	1.07	1.00	0.92	0.82	0.68	120	
∞	3.10	2.40	2.08	1.88	1.74	1.63	1.55	1.49	1.43	1.38	1.30	1.21	1.10	1.04	0.97	0.89	0.79	0.65	0.00	∞	

$\alpha=0.01 \quad \beta=0.20$

$f_1 \backslash f_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	f_1 f_2
2	12.63	12.65	12.64	12.63	12.63	12.63	12.62	12.62	12.62	12.62	12.62	12.62	12.62	12.62	12.62	12.62	12.62	12.62	12.61	2
4	5.88	5.28	5.03	4.39	4.30	4.73	4.69	4.65	4.62	4.60	4.57	4.53	4.49	4.47	4.43	4.44	4.42	4.40	4.38	4
6	4.77	4.03	3.79	3.62	3.51	3.43	3.38	3.33	3.29	3.27	3.22	3.17	3.13	3.10	3.07	3.05	3.02	3.00	2.97	6
8	4.34	3.62	3.31	3.13	3.01	2.92	2.86	2.81	2.77	2.73	2.68	2.63	2.57	2.54	2.51	2.43	2.45	2.42	2.39	8
10	4.12	3.33	3.06	2.87	2.74	2.65	2.58	2.53	2.49	2.45	2.39	2.33	2.27	2.24	2.21	2.17	2.14	2.10	2.06	10
12	3.98	3.24	2.90	2.71	2.58	2.48	2.41	2.36	2.31	2.27	2.21	2.15	2.08	2.05	2.01	1.97	1.94	1.89	1.85	12
14	3.89	3.14	2.80	2.60	2.47	2.37	2.30	2.24	2.19	2.15	2.09	2.02	1.95	1.91	1.87	1.83	1.79	1.75	1.70	14
16	3.82	3.07	2.72	2.52	2.39	2.29	2.21	2.15	2.10	2.06	2.00	1.93	1.85	1.82	1.77	1.73	1.69	1.64	1.59	16
18	3.77	3.01	2.67	2.47	2.33	2.23	2.15	2.09	2.04	1.99	1.93	1.86	1.78	1.74	1.70	1.65	1.60	1.55	1.50	18
20	3.73	2.97	2.63	2.42	2.28	2.18	2.10	2.03	1.93	1.94	1.87	1.80	1.72	1.68	1.63	1.59	1.54	1.48	1.43	20
24	3.68	2.92	2.56	2.35	2.21	2.11	2.02	1.93	1.91	1.86	1.79	1.71	1.63	1.59	1.55	1.49	1.43	1.38	1.31	24
30	3.62	2.85	2.50	2.29	2.14	2.04	1.95	1.89	1.83	1.79	1.71	1.63	1.54	1.50	1.44	1.39	1.33	1.27	1.19	30
40	3.56	2.79	2.44	2.23	2.07	1.97	1.88	1.81	1.76	1.71	1.63	1.55	1.46	1.41	1.35	1.29	1.22	1.15	1.06	40
60	3.51	2.74	2.38	2.16	2.01	1.90	1.81	1.74	1.63	1.64	1.56	1.47	1.37	1.32	1.25	1.19	1.11	1.02	0.92	60
120	3.47	2.68	2.32	2.10	1.95	1.84	1.74	1.68	1.61	1.56	1.48	1.38	1.28	1.23	1.15	1.07	0.99	0.88	0.73	120
∞	3.42	2.63	2.27	2.05	1.89	1.77	1.63	1.61	1.54	1.49	1.40	1.30	1.19	1.12	1.04	0.95	0.85	0.69	0.00	∞

$\alpha=0.01 \quad \beta=0.10$

$f_1 \backslash f_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	f_1 f_2	
2	15.18	15.14	15.13	15.12	15.12	15.11	15.11	15.11	15.11	15.11	15.11	15.11	15.11	15.11	15.11	15.11	15.11	15.10	15.10	15.10	2
4	6.77	6.07	5.77	5.61	5.51	5.43	5.38	5.34	5.30	5.28	5.24	5.20	5.15	5.13	5.11	5.09	5.06	5.04	5.02	4	
6	5.43	4.64	4.29	4.10	3.97	3.83	3.82	3.76	3.72	3.69	3.64	3.58	3.53	3.50	3.47	3.44	3.41	3.38	3.35	6	
8	4.92	4.09	3.73	3.52	3.38	3.23	3.21	3.15	3.10	3.06	3.01	2.94	2.83	2.85	2.81	2.78	2.74	2.71	2.67	8	
10	4.66	3.81	3.43	3.22	3.07	2.97	2.89	2.82	2.77	2.73	2.67	2.60	2.53	2.49	2.46	2.42	2.38	2.33	2.29	10	
12	4.50	3.64	3.26	3.03	2.88	2.77	2.69	2.62	2.57	2.53	2.46	2.39	2.31	2.27	2.23	2.19	2.14	2.10	2.05	12	
14	4.39	3.52	3.14	2.91	2.75	2.64	2.53	2.49	2.43	2.39	2.32	2.24	2.16	2.12	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88	14	
16	4.32	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.43	2.39	2.33	2.29	2.21	2.13	2.05	2.00	1.93	1.91	1.83	1.80	1.75	16	
18	4.26	3.38	2.98	2.75	2.59	2.47	2.39	2.31	2.26	2.21	2.13	2.05	1.93	1.92	1.87	1.82	1.76	1.71	1.64	18	
20	4.22	3.33	2.93	2.70	2.54	2.42	2.33	2.26	2.20	2.15	2.07	1.99	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69	1.63	1.56	20	
24	4.15	3.26	2.83	2.62	2.46	2.34	2.24	2.17	2.11	2.06	1.93	1.89	1.80	1.75	1.69	1.64	1.57	1.51	1.43	24	
30	4.09	3.20	2.79	2.55	2.38	2.26	2.16	2.09	2.02	1.97	1.89	1.80	1.70	1.64	1.59	1.52	1.46	1.38	1.30	30	
40	4.03	3.13	2.72	2.48	2.31	2.18	2.08	2.01	1.94	1.89	1.80	1.71	1.60	1.54	1.48	1.41	1.34	1.25	1.16	40	
60	3.97	3.07	2.66	2.41	2.24	2.11	2.01	1.93	1.83	1.80	1.71	1.61	1.50	1.44	1.37	1.30	1.21	1.11	0.99	60	
120	3.91	3.01	2.59	2.34	2.17	2.04	1.93	1.85	1.78	1.72	1.63	1.52	1.40	1.33	1.26	1.17	1.07	0.95	0.73	120	
∞	3.86	2.95	2.53	2.28	2.10	1.97	1.85	1.78	1.70	1.64	1.54	1.43	1.30	1.23	1.14	1.04	0.91	0.65	0.00	∞	

10. 多重比较中的 q 表

(t -化极差 $q_{k,f} = W/\sqrt{x^2/f}$ 的上侧分位数)

$\alpha = 0.05$

$f \backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$k \backslash f$
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07	50.59	51.96	53.20	54.33	55.36	56.32	57.22	58.04	58.83	59.56	1
2	6.08	8.32	9.80	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99	14.39	14.75	15.03	15.28	15.55	15.81	16.14	16.37	16.57	16.77	2
3	4.60	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.15	10.35	10.52	10.69	10.84	10.98	11.11	11.24	3
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.25	4
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21	5
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59	6
7	3.34	4.16	4.67	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17	7
8	3.26	4.04	4.52	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87	8
9	3.23	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64	9
10	3.15	3.83	4.32	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47	10
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33	11
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21	12
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.62	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11	13
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03	14
15	3.01	3.67	4.05	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96	15
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90	16
17	2.93	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84	17
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79	18
19	2.98	3.59	3.93	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75	19
20	2.95	3.58	3.93	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71	20
21	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59	21
24	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47	24
30	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36	30
40	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24	40
60	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13	60
120	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01	120
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01	∞

$\alpha = 0.01$

$f \backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$k \backslash f$
1	90.03	135.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6	253.2	260.0	266.2	271.8	277.0	281.8	286.3	290.4	294.3	298.0	1
2	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.63	31.69	32.59	33.40	34.13	34.81	35.43	36.00	36.53	37.03	37.50	37.95	2
3	8.25	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69	17.13	17.53	17.89	18.22	18.52	18.81	19.07	19.32	19.55	19.77	3
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.53	11.10	11.55	11.93	12.27	12.57	12.84	13.09	13.32	13.53	13.73	13.91	14.08	14.24	14.40	4
5	5.70	6.98	7.30	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.43	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93	5
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.48	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54	6
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.63	7
8	4.75	5.61	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.63	7.76	7.89	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	8
9	4.61	5.43	5.98	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.33	8.41	8.49	8.57	9
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.49	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.08	8.15	8.23	10
11	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95	11
12	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73	12
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.93	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.35	7.42	7.48	7.55	13
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.83	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.13	7.20	7.27	7.33	7.39	14
15	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26	15
16	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15	16
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.81	6.87	6.94	7.00	7.05	17
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.61	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.73	6.79	6.85	6.91	6.97	18
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89	19
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.28	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.77	6.82	20
21	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61	21
24	3.89	4.45	4.83	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41	24
30	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60	5.69	5.76	5.83	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.16	6.21	30
40	3.76	4.23	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60	5.67	5.73	5.78	5.84	5.89	5.93	5.97	6.01	40
60	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.37	5.44	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83	60
120	3.61	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65	120
∞	3.61	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65	∞

11. 多重比较中的 S 表

$$S_{k-1, f}(\alpha) = \sqrt{(k-1)F_{k-1, f}(\alpha)}$$

$\alpha = 0.05$

$f \backslash k-1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	$k-1 \backslash f$
1	19.97	25.44	29.97	33.92	37.47	40.71	43.72	46.53	49.18	54.10	60.74	70.43	77.31	86.62	1
2	6.16	7.53	8.77	9.82	10.77	11.64	12.45	13.21	13.93	15.26	17.07	19.72	21.61	24.16	2
3	4.37	5.28	6.04	6.71	7.32	7.89	8.41	8.91	9.37	10.24	11.47	13.16	14.40	16.08	3
4	3.73	4.45	5.06	5.59	6.08	6.53	6.95	7.35	7.72	8.42	9.37	10.77	11.77	13.13	4
5	3.40	4.03	4.56	5.03	5.45	5.84	6.21	6.55	6.88	7.49	8.32	9.55	10.43	11.61	5
6	3.21	3.78	4.26	4.68	5.07	5.43	5.76	6.07	6.37	6.93	7.69	8.80	9.60	10.69	6
7	3.08	3.61	4.06	4.46	4.82	5.15	5.46	5.75	6.03	6.55	7.26	8.30	9.05	10.06	7
8	2.99	3.49	3.92	4.29	4.64	4.95	5.24	5.52	5.79	6.28	6.95	7.94	8.65	9.61	8
9	2.92	3.40	3.81	4.17	4.50	4.80	5.03	5.35	5.60	6.07	6.72	7.66	8.34	9.27	9
10	2.86	3.34	3.73	4.08	4.39	4.68	4.96	5.21	5.46	5.91	6.53	7.45	8.10	9.00	10
11	2.82	3.28	3.66	4.00	4.31	4.59	4.86	5.11	5.34	5.78	6.39	7.28	7.91	8.78	11
12	2.79	3.24	3.61	3.94	4.24	4.52	4.77	5.02	5.25	5.68	6.27	7.13	7.75	8.60	12
13	2.76	3.20	3.57	3.89	4.18	4.45	4.70	4.94	5.17	5.59	6.16	7.01	7.62	8.45	13
14	2.73	3.17	3.53	3.85	4.13	4.40	4.65	4.88	5.10	5.51	6.08	6.91	7.51	8.32	14
15	2.71	3.14	3.50	3.81	4.09	4.35	4.60	4.83	5.04	5.45	6.00	6.82	7.41	8.21	15
16	2.70	3.12	3.47	3.76	4.06	4.31	4.55	4.78	4.99	5.39	5.94	6.75	7.33	8.11	16
17	2.68	3.10	3.44	3.75	4.02	4.28	4.51	4.74	4.95	5.34	5.88	6.68	7.25	8.03	17
18	2.67	3.08	3.42	3.72	4.00	4.25	4.48	4.70	4.91	5.30	5.83	6.62	7.18	7.95	18
19	2.65	3.06	3.40	3.70	3.97	4.22	4.45	4.67	4.88	5.26	5.79	6.57	7.12	7.88	19
20	2.64	3.05	3.39	3.68	3.95	4.20	4.42	4.64	4.85	5.23	5.75	6.52	7.07	7.82	20
24	2.61	3.00	3.33	3.62	3.88	4.12	4.34	4.55	4.75	5.12	5.62	6.37	6.90	7.63	24
30	2.58	2.96	3.28	3.56	3.81	4.04	4.26	4.46	4.65	5.01	5.50	6.22	6.73	7.43	30
40	2.54	2.92	3.23	3.50	3.74	3.97	4.18	4.37	4.56	4.90	5.37	6.06	6.56	7.23	40
60	2.51	2.88	3.18	3.44	3.68	3.89	4.10	4.28	4.46	4.80	5.25	5.91	6.39	7.03	60
120	2.48	2.84	3.13	3.33	3.61	3.82	4.02	4.20	4.37	4.69	5.12	5.76	6.21	6.83	120
∞	2.45	2.80	3.08	3.33	3.55	3.75	3.94	4.11	4.28	4.59	5.00	5.60	6.04	6.62	∞

$\alpha = 0.01$

$f \backslash k-1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	$k-1 \backslash f$
1	100.0	127.3	150.0	169.3	187.5	203.7	218.8	232.3	246.1	270.7	303.9	352.4	336.8	433.4	1
2	14.07	17.25	19.92	22.23	24.41	26.37	28.20	29.91	31.53	34.54	38.62	44.60	48.86	54.63	2
3	7.85	9.40	10.72	11.88	12.94	13.92	14.83	15.69	16.50	18.02	20.08	23.10	25.27	28.20	3
4	6.00	7.08	7.99	8.81	9.55	10.24	10.88	11.49	12.06	13.13	14.59	16.74	18.28	20.37	4
5	5.15	6.02	6.75	7.41	8.00	8.56	9.07	9.56	10.03	10.89	12.03	13.82	15.07	16.77	5
6	4.67	5.42	6.05	6.61	7.13	7.60	8.05	8.47	8.87	9.62	10.65	12.16	13.25	14.73	6
7	4.37	5.04	5.60	6.11	6.57	7.00	7.40	7.78	8.14	8.81	9.73	11.10	12.08	13.41	7
8	4.16	4.77	5.29	5.76	6.18	6.58	6.94	7.29	7.63	8.25	9.10	10.35	11.26	12.49	8
9	4.01	4.53	5.07	5.50	5.90	6.27	6.61	6.94	7.25	7.83	8.63	9.81	10.65	11.81	9
10	3.89	4.43	4.90	5.31	5.63	6.03	6.36	6.67	6.96	7.51	8.27	9.39	10.19	11.29	10
11	3.80	4.32	4.76	5.16	5.52	5.85	6.16	6.46	6.74	7.26	7.99	9.05	9.82	10.87	11
12	3.72	4.23	4.65	5.03	5.38	5.70	6.00	6.28	6.55	7.06	7.76	8.78	9.53	10.54	12
13	3.66	4.15	4.56	4.93	5.27	5.58	5.87	6.14	6.40	6.89	7.57	8.56	9.28	10.26	13
14	3.61	4.09	4.49	4.85	5.17	5.47	5.76	6.02	6.28	6.75	7.41	8.37	9.07	10.02	14
15	3.57	4.03	4.42	4.77	5.09	5.38	5.66	5.92	6.17	6.63	7.27	8.21	8.89	9.82	15
16	3.53	3.98	4.37	4.71	5.02	5.31	5.58	5.83	6.08	6.53	7.15	8.07	8.74	9.64	16
17	3.50	3.94	4.32	4.66	4.96	5.24	5.51	5.76	5.99	6.44	7.05	7.95	8.60	9.49	17
18	3.47	3.91	4.28	4.61	4.91	5.18	5.44	5.69	5.92	6.36	6.96	7.84	8.48	9.36	18
19	3.44	3.88	4.24	4.57	4.86	5.13	5.39	5.63	5.86	6.29	6.88	7.75	8.37	9.24	19
20	3.42	3.85	4.21	4.53	4.82	5.09	5.34	5.58	5.80	6.23	6.81	7.67	8.28	9.13	20
24	3.35	3.76	4.11	4.41	4.69	4.95	5.19	5.41	5.63	6.03	6.53	7.40	7.99	8.79	24
30	3.28	3.68	4.01	4.30	4.57	4.81	5.04	5.25	5.46	5.84	6.36	7.14	7.70	8.46	30
40	3.22	3.60	3.91	4.19	4.44	4.63	4.89	5.10	5.29	5.65	6.15	6.88	7.41	8.13	40
60	3.16	3.52	3.82	4.09	4.33	4.55	4.75	4.95	5.13	5.47	5.94	6.63	7.13	7.80	60
120	3.09	3.44	3.73	3.98	4.21	4.42	4.62	4.80	4.97	5.29	5.73	6.38	6.84	7.47	120
∞	3.03	3.37	3.64	3.88	4.10	4.30	4.48	4.65	4.82	5.12	5.53	6.13	6.56	7.13	∞

12. 检验相关系数 $\rho = 0$ 的临界值 (r_α) 表

$$P(|r| > r_\alpha) = \alpha$$

$f \backslash \alpha$	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001	$\alpha \backslash f$
1	0.98769	0.99692	0.999507	0.999877	0.9999988	1
2	.90000	.95000	.98000	.99000	.99900	2
3	.8054	.8783	.93423	.95873	.99116	3
4	.7293	.8114	.8822	.91720	.97406	4
5	.6694	.7645	.8329	.8745	.95074	5
6	.6215	.7087	.7887	.8343	.92493	6
7	.5822	.6664	.7498	.7977	.8932	7
8	.5494	.6319	.7155	.7646	.8721	8
9	.5214	.6021	.6851	.7348	.8471	9
10	.4973	.5760	.6581	.7079	.8233	10
11	.4782	.5529	.6339	.6835	.8010	11
12	.4625	.5324	.6120	.6614	.7800	12
13	.4499	.5139	.5923	.6411	.7603	13
14	.4399	.4973	.5742	.6226	.7420	14
15	.4324	.4821	.5577	.6055	.7246	15
16	.4269	.4733	.5425	.5897	.7084	16
17	.4237	.4611	.5285	.5751	.6932	17
18	.4214	.4500	.5155	.5614	.6787	18
19	.4200	.4400	.5034	.5487	.6652	19
20	.4194	.4327	.4921	.5368	.6524	20
25	.4223	.4309	.4451	.4369	.5974	25
30	.4260	.4394	.4093	.4487	.6541	30
35	.4246	.4246	.3810	.4182	.6189	35
40	.42573	.4044	.3578	.3932	.4896	40
45	.4248	.2875	.3384	.3721	.4648	45
50	.2306	.2732	.3218	.3541	.4433	50
60	.2108	.2500	.2948	.3248	.4078	60
70	.1954	.2319	.2737	.3017	.3799	70
80	.1829	.2172	.2565	.2830	.3568	80
90	.1726	.2050	.2422	.2673	.3375	90
100	.1638	.1946	.2301	.2540	.3211	100

13. r 与 z 的换算表

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \quad (\text{表内为 } r)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	r
0.0	0.0000	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500	0.0599	0.0699	0.0798	0.0898	0.0
0.1	.0997	.1096	.1194	.1293	.1391	.1489	.1586	.1684	.1781	.1877	0.1
0.2	.1974	.2070	.2165	.2260	.2355	.2449	.2543	.2636	.2729	.2821	0.2
0.3	.2913	.3004	.3095	.3185	.3275	.3364	.3452	.3540	.3627	.3714	0.3
0.4	.3800	.3885	.3969	.4053	.4136	.4219	.4301	.4382	.4462	.4542	0.4
0.5	.4621	.4699	.4777	.4854	.4930	.5005	.5080	.5154	.5227	.5299	0.5
0.6	.5370	.5441	.5511	.5580	.5649	.5717	.5784	.5850	.5915	.5980	0.6
0.7	.6044	.6107	.6169	.6231	.6291	.6351	.6411	.6469	.6527	.6584	0.7
0.8	.6640	.6696	.6751	.6805	.6858	.6911	.6963	.7014	.7064	.7114	0.8
0.9	.7168	.7211	.7259	.7306	.7352	.7398	.7443	.7487	.7531	.7574	0.9
1.0	.7616	.7658	.7699	.7739	.7779	.7818	.7857	.7895	.7932	.7969	1.0
1.1	.8005	.8041	.8076	.8110	.8144	.8178	.8210	.8243	.8275	.8306	1.1
1.2	.8337	.8367	.8397	.8426	.8455	.8483	.8511	.8538	.8565	.8591	1.2
1.3	.8617	.8643	.8668	.8692	.8717	.8741	.8764	.8787	.8810	.8832	1.3
1.4	.8864	.8875	.8896	.8917	.8937	.8957	.8977	.8996	.9015	.9033	1.4
1.5	.9051	.9069	.9087	.9104	.9121	.9138	.9154	.9170	.9186	.9201	1.5
1.6	.9217	.9232	.9246	.9261	.9275	.9289	.9302	.9316	.9329	.9341	1.6
1.7	.9354	.9366	.9379	.9391	.9402	.9414	.9425	.9436	.9447	.9458	1.7
1.8	.94681	.94783	.94884	.94983	.95080	.95175	.95268	.95359	.95449	.95537	1.8
1.9	.95624	.95709	.95792	.95873	.95953	.96032	.96109	.96185	.96259	.96331	1.9
2.0	.96403	.96473	.96541	.96609	.96675	.96739	.96803	.96865	.96926	.96986	2.0
2.1	.97045	.97103	.97159	.97215	.97269	.97323	.97375	.97426	.97477	.97526	2.1
2.2	.97574	.97622	.97668	.97714	.97759	.97803	.97846	.97888	.97929	.97970	2.2
2.3	.98010	.98049	.98087	.98124	.98161	.98197	.98233	.98267	.98301	.98335	2.3
2.4	.98367	.98399	.98431	.98462	.98492	.98522	.98551	.98579	.98607	.98635	2.4
2.5	.98661	.98688	.98714	.98739	.98764	.98788	.98812	.98835	.98858	.98881	2.5
2.6	.98903	.98924	.98945	.98966	.98987	.99007	.99026	.99045	.99064	.99083	2.6
2.7	.99101	.99118	.99136	.99153	.99170	.99186	.99202	.99218	.99233	.99248	2.7
2.8	.99263	.99273	.99292	.99306	.99320	.99333	.99346	.99359	.99372	.99384	2.8
2.9	.99396	.99403	.99420	.99431	.99443	.99454	.99464	.99475	.99485	.99495	2.9

14. 二项分布表

$$Q(n, k, p) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

n	k \ p	p									p	k	n		
		0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.2	0.3	0.4				0.5	
5	5			0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00032	0.00243	0.01024	0.03125		5	5	
	4	0.00000	0.00000	.00001	.00006	.00019	.00046	.00672	.03078	.08704	.18750		4		
	3	.00001	.00008	.00060	.00197	.00453	.00856	.05792	.16308	.31744	.50000		3		
	2	.00093	.00384	.01476	.03187	.05436	.08146	.26272	.47178	.66304	.81250		2		
	1	.04901	.09608	.18463	.26610	.34092	.40951	.67232	.83193	.92224	.96375		1		
10	10								0.00001	0.00010	0.00098		10	10	
	9							0.00000	.00014	.00168	.01074		9		
	8						0.00000	.00008	.00159	.01229	.05469		8		
	7				0.00000	0.00000	.00001	.00086	.01059	.05476	.17183		7		
	6			0.00000	.00001	.00004	.00015	.00637	.04735	.16624	.37695		6		
	5		.00000	.00002	.00015	.00059	.00163	.03279	.15027	.36690	.62305		5		
	4	.00000	.00003	.00044	.00203	.00580	.01230	.12037	.35039	.61772	.82813		4		
	3	.00011	.00086	.00621	.01884	.04008	.07019	.32220	.61722	.83271	.94531		3		
	2	.00427	.01618	.05816	.11759	.18788	.26390	.62419	.85069	.95364	.99926		2		
	1	.09562	.18293	.33517	.48138	.56561	.65132	.89263	.97175	.99395	.99902		1		
15	15									0.00000	0.00003		15	15	
	14								0.00000	.00003	.00049		14		
	13								.00001	.00028	.00369		13		
	12							0.00000	.00009	.00193	.01758		12		
	11							.00001	.00067	.00935	.05923		11		
	10							.00011	.00365	.03383	.15083		10		
	9					0.00000	0.00000	.00079	.01524	.09505	.30362		9		
	8				0.00000	.00001	.00003	.00424	.05001	.21310	.50000		8		
	7			0.00000	.00001	.00008	.00031	.01806	.13114	.39019	.69638		7		
	6		0.00000	.00001	.00015	.00070	.00225	.06105	.27838	.59678	.84912		6		
	5	0.00000	.00001	.00022	.00140	.00497	.01272	.16423	.48451	.78272	.94077		5		
	4	.00001	.00018	.00245	.01036	.02731	.05556	.35184	.70313	.90950	.98242		4		
	3	.00042	.00304	.02029	.05713	.11297	.18406	.60198	.87317	.97289	.99631		3		
	2	.00963	.03534	.11911	.22624	.34027	.45096	.83287	.96473	.99483	.99951		2		
	1	.13994	.26143	.45791	.60471	.71370	.79411	.96482	.99525	.99953	.99997		1		
20	20										0.00000		20	20	
	19										0.00000	.00002			19
	18										.00001	.00020			18
	17									0.00000	.00005	.00129			17
	16									.00001	.00032	.00591			16
	15									.00004	.00161	.02069			15
	14								0.00000	.00026	.00647	.05766			14
	13								.00002	.00128	.02103	.13159			13
	12								.00010	.00514	.05653	.25172			12
	11						0.00000	.00056	.01714	.12752	.41190		11		
	10					0.00000	.00001	.00259	.04796	.24466	.58810		10		
	9				0.00000	.00001	.00006	.00998	.11333	.40440	.74328		9		
	8			0.00000	.00001	.00009	.00042	.03214	.22773	.58411	.86841		8		
	7			.00001	.00011	.00064	.00239	.08669	.39199	.74999	.94234		7		
	6		0.00000	.00010	.00087	.00380	.01125	.19579	.58363	.87440	.97931		6		
	5	0.00000	.00004	.00096	.00563	.01834	.04317	.37035	.76249	.94905	.99409		5		
	4	.00004	.00060	.00741	.02897	.07062	.13295	.58855	.89291	.98404	.99871		4		
	3	.00100	.00707	.04386	.11497	.21205	.32307	.79392	.96452	.99639	.99980		3		
	2	.01686	.05990	.18966	.33955	.48314	.60825	.93082	.99236	.99943	.99998		2		
	1	.18209	.33239	.55800	.70989	.81131	.87842	.98847	.99920	.99996	1.00000		1		

n	p		0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	p		n
	k	h											k	h	
25	25														25
	24											0.00000			24
	23											.00001			23
	22											0.00000	.00008		22
	21											.00001	.00046		21
	20											.00005	.00204		20
	19									0.00000		.00028	.00732		19
	18									.00002	.00121	.02164			18
	17									.00010	.00433	.05388			17
	16								0.00000	.00045	.01317	.11476			16
	15									.00001	.00178	.03439	.21218		15
	14									.00008	.00599	.07780	.34502		14
	13									.00037	.01747	.15377	.50000		13
	12							0.00000	.00154	.04425	.26772	.65493			12
	11						0.00000	.00001	.00556	.09780	.41423	.78782			11
	10				0.00000	.00001	.00003	.01733	.18944	.57538	.88524				10
	9				.00001	.00002	.00046	.04677	.32307	.72647	.94612				9
	8			0.00000	.00007	.00058	.00226	.10912	.48815	.84345	.97836				8
	7		0.00000	.00004	.00051	.00277	.00948	.21996	.65935	.92643	.99268				7
6		.00001	.00033	.00306	.01229	.03340	.38331	.80651	.97064	.99796				6	
5	0.00000	.00012	.00278	.01505	.04514	.09799	.57933	.90953	.99053	.99954				5	
4	.00011	.00145	.01652	.05976	.13509	.23641	.76601	.96676	.99763	.99992				4	
3	.00195	.01324	.07648	.18711	.32317	.46291	.90177	.99104	.99957	.99999				3	
2	.02576	.08365	.26419	.44734	.60528	.72879	.97261	.99843	.99995	1.00000				2	
1	.22213	.39654	.63960	.78709	.87564	.92321	.99622	.99937	1.00000	1.00000				1	
30	30														30
	29														29
	28														28
	27											0.00000			27
	26											.00003			26
	25										0.00000	.00016			25
	24										.00001	.00072			24
	23										.00005	.00261			23
	22									0.00000	.00022	.00806			22
	21									.00001	.00086	.02139			21
	20									.00004	.00285	.04937			20
	19									.00016	.00830	.10024			19
	18							0.00000	.00063	.02124	.18080				18
	17							.00001	.00212	.04811	.29233				17
	16							.00005	.00637	.09706	.42777				16
	15							.00023	.01694	.17537	.57223				15
	14							.00090	.04005	.28550	.70767				14
	13						0.00000	.00311	.08447	.42153	.81920				13
	12					0.00000	.00002	.00949	.15932	.56891	.89976				12
11				0.00000	.00001	.00009	.02562	.26963	.70853	.95063				11	
10				.00001	.00007	.00045	.06109	.41119	.82371	.97861				10	
9			0.00000	.00005	.00041	.00202	.12365	.56848	.90599	.99194				9	
8			.00002	.00080	.00197	.00778	.23921	.71862	.95643	.99739				8	
7		0.00000	.00015	.00167	.00825	.02583	.39303	.84043	.93232	.99923				7	
6	0.00000	.00003	.00106	.00795	.02929	.07319	.57249	.92341	.99434	.99984				6	
5	.00001	.00030	.00632	.03154	.08736	.17549	.54477	.96935	.99249	.99997				5	
4	.00022	.00289	.03059	.10262	.21579	.35256	.87729	.99063	.99969	1.00000				4	
3	.00332	.02172	.11690	.26760	.43460	.58365	.95532	.99789	.99995	1.00000				3	
2	.03615	.12055	.33332	.54453	.70421	.81630	.98943	.99969	1.00000	1.00000				2	
1	.26030	.45452	.70614	.84374	.91803	.95761	.99376	1.00000	1.00000	1.00000				1	

15. 二项分布参数 p 的置信区间表

$1-\alpha=0.95$

$n-k$ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	$n-k$ k
0	0.975	0.842	0.708	0.602	0.522	0.459	0.410	0.369	0.336	0.308	0.265	0.232	0.206	0
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1
2	.937	.906	.806	.716	.641	.579	.527	.483	.445	.413	.360	.319	.287	2
3	.013	.008	.006	.005	.004	.004	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.001	3
4	.992	.932	.853	.777	.710	.651	.600	.556	.518	.484	.428	.383	.347	4
5	.094	.068	.053	.043	.037	.032	.023	.025	.023	.021	.018	.016	.014	5
6	.994	.947	.882	.816	.755	.701	.652	.610	.572	.533	.481	.434	.396	6
7	.194	.147	.118	.099	.085	.075	.067	.060	.055	.050	.043	.038	.034	7
8	.995	.957	.901	.843	.788	.738	.692	.651	.614	.581	.524	.476	.437	8
9	.284	.223	.184	.157	.137	.122	.109	.099	.091	.084	.073	.064	.057	9
10	.996	.963	.915	.863	.813	.766	.723	.684	.649	.616	.560	.512	.471	10
11	.359	.290	.245	.212	.187	.167	.151	.139	.128	.118	.103	.091	.082	11
12	.996	.968	.925	.878	.833	.789	.749	.711	.677	.646	.590	.543	.502	12
13	.421	.349	.299	.262	.234	.211	.192	.177	.163	.152	.133	.119	.107	13
14	.997	.972	.933	.891	.849	.808	.770	.734	.701	.671	.616	.570	.529	14
15	.473	.400	.343	.308	.277	.251	.230	.213	.198	.184	.163	.146	.132	15
16	.997	.975	.940	.901	.861	.823	.787	.753	.722	.692	.639	.593	.553	16
17	.517	.444	.390	.349	.316	.289	.266	.247	.230	.215	.191	.172	.156	17
18	.997	.977	.945	.909	.872	.837	.802	.770	.740	.711	.660	.615	.575	18
19	.555	.482	.428	.386	.351	.323	.299	.278	.260	.244	.218	.197	.180	19
20	.998	.979	.950	.916	.882	.848	.816	.785	.756	.728	.678	.634	.595	20
21	.587	.516	.462	.419	.384	.354	.329	.308	.289	.272	.244	.221	.202	21
22	.998	.982	.957	.927	.897	.867	.837	.809	.782	.756	.709	.666	.623	22
23	.640	.572	.519	.476	.440	.410	.384	.361	.340	.322	.291	.266	.245	23
24	.998	.984	.962	.936	.909	.881	.854	.828	.803	.779	.734	.694	.657	24
25	.681	.617	.566	.524	.488	.457	.430	.407	.385	.366	.334	.306	.283	25
26	.999	.936	.966	.943	.918	.893	.868	.844	.820	.798	.755	.717	.681	26
27	.713	.653	.604	.563	.529	.498	.471	.447	.425	.405	.372	.343	.319	27
28	.999	.938	.970	.948	.925	.902	.879	.857	.835	.814	.773	.736	.702	28
29	.740	.683	.637	.597	.564	.533	.506	.482	.460	.440	.406	.376	.351	29
30	.999	.939	.972	.953	.932	.910	.889	.868	.847	.827	.789	.753	.720	30
31	.762	.708	.664	.626	.593	.564	.537	.513	.492	.472	.437	.407	.381	31
32	.999	.990	.975	.956	.937	.917	.897	.877	.858	.839	.803	.768	.737	32
33	.781	.730	.688	.651	.619	.590	.565	.541	.519	.500	.465	.434	.408	33
34	.999	.991	.976	.960	.942	.923	.904	.885	.867	.849	.814	.782	.751	34
35	.797	.749	.708	.673	.642	.614	.589	.566	.545	.525	.490	.460	.433	35
36	.999	.991	.978	.962	.945	.928	.910	.893	.875	.858	.825	.794	.764	36
37	.810	.765	.726	.693	.663	.636	.611	.588	.567	.543	.513	.483	.456	37
38	.999	.992	.930	.965	.949	.932	.916	.899	.882	.866	.834	.804	.776	38
39	.822	.779	.743	.710	.681	.655	.631	.609	.583	.569	.535	.504	.478	39
40	.999	.992	.981	.967	.952	.936	.920	.904	.889	.873	.843	.814	.786	40
41	.833	.792	.757	.725	.697	.672	.649	.627	.607	.583	.554	.524	.498	41
42	.999	.994	.985	.975	.963	.951	.933	.925	.912	.900	.875	.850	.827	42
43	.871	.833	.809	.783	.759	.737	.717	.698	.679	.662	.631	.602	.578	43
44	1.000	.996	.990	.983	.975	.966	.957	.948	.939	.929	.911	.893	.874	44
45	0.912	.838	.867	.848	.830	.813	.797	.782	.767	.752	.727	.703	.681	45
46	1.000	.993	.994	.989	.984	.979	.973	.967	.962	.955	.943	.931	.919	46
47	0.946	.931	.917	.904	.892	.881	.870	.859	.849	.833	.820	.802	.786	47
48	1.000	.999	.997	.995	.992	.989	.986	.983	.980	.977	.970	.964	.957	48
49	0.973	.965	.957	.951	.944	.938	.932	.926	.920	.914	.903	.893	.883	49
50	1.000	1.000	.999	.998	.997	.996	.995	.993	.992	.991	.938	.935	.932	50
51	0.989	0.936	.933	.930	.927	.924	.922	.920	.919	.918	.916	.915	.914	51

$1 - \alpha = 0.95$

$n-k$ k	18	20	22	24	26	28	30	40	60	100	200	500	$n-k$ k
0	0.185	0.168	0.154	0.142	0.132	0.123	0.116	0.088	0.060	0.036	0.018	0.007	0
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
1	.260	.233	.219	.203	.190	.178	.167	.129	.088	.054	.027	.011	1
	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	
2	.317	.292	.270	.251	.235	.221	.208	.162	.112	.069	.035	.014	2
	.012	.011	.010	.009	.009	.008	.008	.006	.004	.002	.001	.000	
3	.363	.336	.312	.292	.274	.257	.243	.191	.133	.083	.043	.017	3
	.030	.028	.025	.024	.022	.020	.019	.015	.010	.006	.003	.001	
4	.403	.374	.349	.327	.307	.290	.275	.217	.152	.096	.049	.020	4
	.052	.047	.044	.040	.038	.035	.033	.025	.017	.011	.005	.002	
5	.436	.407	.381	.358	.337	.319	.303	.241	.170	.108	.056	.023	5
	.075	.068	.063	.058	.055	.051	.048	.037	.025	.016	.008	.003	
6	.467	.436	.410	.386	.364	.345	.328	.263	.187	.119	.062	.026	6
	.098	.090	.083	.077	.072	.068	.064	.049	.034	.021	.011	.004	
7	.494	.463	.435	.411	.389	.369	.351	.283	.203	.130	.068	.028	7
	.121	.111	.103	.096	.090	.084	.080	.062	.043	.027	.014	.005	
8	.518	.487	.459	.434	.412	.391	.373	.302	.218	.141	.074	.031	8
	.143	.132	.123	.115	.107	.101	.096	.075	.052	.033	.017	.007	
9	.540	.508	.481	.455	.433	.412	.393	.321	.233	.151	.080	.033	9
	.165	.153	.142	.133	.125	.118	.111	.088	.061	.038	.020	.008	
10	.560	.528	.500	.475	.452	.431	.412	.333	.248	.162	.086	.036	10
	.186	.173	.161	.151	.142	.134	.127	.100	.071	.045	.023	.009	
12	.594	.563	.535	.510	.487	.465	.446	.369	.273	.180	.097	.040	12
	.227	.211	.197	.186	.175	.166	.157	.125	.089	.057	.030	.012	
14	.624	.593	.566	.540	.517	.496	.476	.398	.297	.198	.107	.045	14
	.264	.247	.232	.218	.206	.196	.186	.150	.107	.069	.036	.015	
16	.649	.619	.592	.567	.544	.522	.502	.422	.319	.214	.117	.050	16
	.293	.280	.263	.249	.236	.224	.214	.173	.126	.081	.043	.018	
18	.671	.642	.615	.590	.568	.547	.527	.445	.340	.230	.127	.054	18
	.329	.310	.293	.277	.264	.251	.240	.196	.143	.093	.050	.021	
20	.690	.662	.636	.612	.589	.568	.548	.467	.359	.245	.137	.059	20
	.358	.333	.320	.304	.289	.276	.264	.217	.160	.105	.057	.024	
22	.707	.680	.654	.631	.608	.588	.568	.487	.378	.260	.146	.063	22
	.385	.364	.346	.329	.314	.300	.287	.237	.177	.117	.063	.027	
24	.723	.696	.671	.648	.626	.605	.586	.505	.395	.274	.155	.067	24
	.410	.388	.369	.352	.337	.322	.309	.257	.193	.128	.070	.030	
26	.736	.711	.686	.663	.642	.622	.603	.522	.411	.287	.164	.072	26
	.432	.411	.392	.374	.358	.343	.330	.276	.208	.140	.077	.033	
28	.749	.724	.700	.678	.657	.637	.618	.533	.426	.300	.172	.076	28
	.453	.432	.412	.395	.378	.363	.349	.294	.223	.153	.083	.036	
30	.760	.736	.713	.691	.670	.651	.632	.552	.441	.313	.181	.080	30
	.473	.452	.432	.414	.397	.382	.368	.311	.237	.162	.090	.039	
40	.804	.783	.763	.743	.724	.706	.689	.614	.503	.368	.220	.099	40
	.555	.533	.513	.495	.478	.462	.448	.386	.303	.213	.122	.053	
60	.857	.840	.823	.807	.792	.777	.763	.697	.593	.455	.287	.136	60
	.660	.641	.622	.605	.589	.574	.559	.497	.407	.300	.181	.083	
100	.907	.895	.883	.872	.860	.847	.833	.787	.700	.571	.395	.199	100
	.770	.755	.740	.726	.713	.700	.687	.632	.545	.429	.280	.138	
200	.950	.943	.937	.930	.923	.917	.910	.878	.819	.720	.550	.319	200
	.873	.863	.854	.845	.836	.823	.819	.780	.713	.605	.450	.253	
500	.979	.976	.973	.970	.967	.964	.961	.947	.917	.862	.747	.531	500
	.946	.941	.937	.933	.923	.924	.920	.901	.864	.801	.681	.469	

$1 - \alpha = 0.99$

$n-k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	$n-k$
0	0.995	0.929	0.829	0.734	0.653	0.586	0.531	0.484	0.445	0.411	0.357	0.315	0.282	0
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1
2	.997	.959	.889	.815	.746	.685	.632	.585	.544	.509	.449	.402	.363	2
3	.003	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	3
4	.998	.971	.917	.856	.797	.742	.693	.648	.603	.573	.512	.463	.422	4
5	.041	.029	.023	.019	.016	.014	.012	.011	.010	.009	.008	.007	.006	5
6	.999	.977	.934	.882	.830	.781	.735	.693	.655	.621	.561	.510	.468	6
7	.111	.083	.066	.055	.047	.042	.037	.033	.030	.028	.024	.021	.019	7
8	.999	.931	.945	.900	.854	.809	.767	.723	.691	.658	.599	.549	.507	8
9	.185	.144	.118	.100	.087	.077	.069	.062	.057	.053	.045	.040	.036	9
10	.999	.984	.953	.913	.872	.831	.791	.755	.720	.688	.631	.582	.539	10
11	.254	.203	.170	.146	.123	.114	.103	.094	.087	.080	.070	.062	.055	11
12	.999	.936	.958	.923	.886	.848	.811	.777	.744	.714	.658	.610	.567	12
13	.315	.258	.219	.191	.169	.152	.133	.127	.117	.109	.095	.085	.076	13
14	.999	.988	.963	.931	.897	.862	.828	.795	.764	.735	.681	.634	.592	14
15	.368	.307	.265	.233	.209	.189	.172	.159	.147	.137	.121	.103	.097	15
16	.999	.989	.967	.938	.906	.873	.841	.811	.781	.753	.701	.655	.614	16
17	.415	.352	.307	.272	.245	.223	.205	.189	.176	.165	.146	.131	.119	17
18	.999	.990	.970	.943	.913	.883	.853	.824	.795	.768	.718	.674	.634	18
19	.456	.392	.345	.309	.280	.256	.236	.219	.205	.192	.171	.154	.140	19
20	1.000	.991	.972	.947	.920	.891	.863	.835	.808	.782	.734	.690	.651	20
21	0.491	.427	.379	.342	.312	.286	.265	.247	.232	.218	.195	.176	.161	21
22	1.000	.992	.976	.955	.930	.905	.879	.854	.829	.805	.760	.719	.682	22
23	0.551	.488	.439	.401	.369	.342	.319	.299	.282	.266	.240	.218	.200	23
24	1.000	.993	.979	.960	.938	.915	.892	.869	.846	.824	.782	.743	.707	24
25	0.598	.537	.490	.451	.418	.390	.366	.345	.326	.310	.281	.257	.237	25
26	1.000	.994	.981	.964	.945	.924	.903	.881	.860	.839	.800	.763	.728	26
27	0.637	.578	.532	.493	.461	.433	.408	.386	.366	.349	.318	.293	.272	27
28	1.000	.995	.983	.968	.950	.931	.911	.891	.872	.852	.815	.780	.747	28
29	0.669	.613	.568	.530	.498	.469	.445	.422	.402	.384	.353	.326	.304	29
30	1.000	.995	.985	.971	.954	.936	.918	.900	.881	.863	.828	.794	.763	30
31	0.696	.642	.599	.562	.530	.502	.478	.455	.435	.417	.384	.357	.334	31
32	1.000	.996	.986	.973	.958	.941	.924	.907	.890	.873	.839	.807	.777	32
33	0.719	.668	.626	.590	.559	.531	.507	.484	.464	.445	.413	.385	.361	33
34	1.000	.996	.987	.975	.961	.946	.930	.913	.897	.881	.849	.819	.789	34
35	0.738	.690	.649	.615	.584	.557	.533	.511	.490	.471	.439	.410	.386	35
36	1.000	.996	.988	.977	.963	.949	.934	.919	.903	.888	.853	.829	.800	36
37	0.755	.709	.670	.637	.607	.580	.557	.535	.515	.496	.463	.434	.410	37
38	1.000	.996	.989	.978	.966	.952	.938	.924	.909	.894	.866	.838	.811	38
39	0.770	.726	.689	.656	.627	.602	.578	.557	.537	.518	.485	.457	.432	39
40	1.000	.997	.989	.980	.968	.955	.942	.928	.914	.900	.873	.846	.820	40
41	0.784	.741	.705	.674	.646	.621	.598	.577	.557	.539	.506	.478	.452	41
42	1.000	.993	.992	.984	.975	.965	.955	.944	.933	.921	.899	.876	.854	42
43	0.832	.797	.767	.740	.716	.694	.673	.654	.636	.619	.588	.560	.536	43
44	1.000	.993	.995	.989	.983	.976	.969	.961	.953	.945	.923	.912	.895	44
45	0.884	.859	.836	.816	.797	.780	.763	.748	.733	.719	.693	.663	.646	45
46	1.000	.999	.997	.993	.990	.985	.981	.976	.971	.965	.955	.943	.932	46
47	0.929	.912	.897	.884	.871	.858	.847	.836	.825	.815	.795	.777	.761	47
48	1.000	.999	.993	.997	.995	.992	.990	.988	.985	.982	.976	.970	.964	48
49	0.964	.955	.947	.939	.932	.925	.919	.913	.907	.901	.890	.878	.863	49
50	1.000	1.000	.999	.999	.998	.997	.996	.995	.994	.993	.990	.988	.985	50
51	0.985	.982	.973	.975	.972	.969	.967	.964	.961	.959	.953	.949	.944	51

$1 - \alpha = 0.99$

$n-k$ k	18	20	22	24	26	28	30	40	60	100	200	500	$n-k$ k
0	0.255 0.000	0.233 0.000	0.214 0.000	0.193 0.000	0.184 0.000	0.172 0.000	0.162 0.000	0.124 0.000	0.085 0.000	0.052 0.000	0.026 0.000	0.011 0.000	0
1	.331 .000	.304 .000	.231 .000	.262 .000	.245 .000	.230 .000	.216 .000	.163 .000	.116 .000	.071 .000	.033 .000	.015 .000	1
2	.387 .005	.353 .005	.332 .004	.310 .004	.291 .004	.274 .004	.259 .003	.203 .002	.141 .002	.083 .001	.045 .001	.018 .000	2
3	.432 .017	.401 .015	.374 .014	.351 .013	.330 .012	.311 .011	.295 .011	.233 .008	.164 .005	.103 .003	.053 .002	.022 .001	3
4	.470 .032	.433 .029	.410 .027	.385 .025	.363 .023	.344 .022	.326 .020	.260 .013	.184 .011	.116 .007	.061 .003	.025 .001	4
5	.502 .050	.470 .046	.441 .042	.416 .039	.393 .037	.373 .034	.354 .032	.284 .025	.203 .017	.129 .010	.063 .005	.023 .002	5
6	.531 .069	.493 .064	.469 .059	.443 .054	.420 .051	.398 .043	.379 .045	.306 .035	.220 .024	.142 .015	.075 .008	.031 .003	6
7	.555 .089	.522 .082	.493 .076	.467 .070	.443 .066	.422 .062	.402 .058	.327 .045	.237 .031	.153 .019	.081 .010	.033 .004	7
8	.573 .109	.545 .100	.516 .093	.489 .087	.465 .081	.443 .076	.423 .072	.346 .056	.252 .039	.164 .024	.087 .012	.036 .005	8
9	.593 .128	.565 .119	.536 .110	.510 .103	.485 .097	.463 .091	.443 .086	.364 .067	.267 .047	.175 .029	.093 .015	.039 .006	9
10	.616 .143	.583 .137	.555 .127	.529 .119	.504 .112	.482 .106	.461 .100	.381 .079	.281 .055	.185 .035	.099 .018	.041 .007	10
12	.647 .185	.616 .172	.587 .161	.561 .151	.537 .142	.515 .134	.494 .127	.412 .101	.307 .072	.205 .045	.110 .024	.047 .010	12
14	.674 .220	.643 .206	.615 .193	.590 .181	.566 .171	.543 .162	.522 .154	.440 .124	.332 .088	.223 .057	.122 .030	.051 .012	14
16	.686 .253	.666 .237	.639 .223	.614 .211	.590 .200	.563 .189	.543 .180	.464 .146	.354 .105	.239 .068	.132 .036	.056 .015	16
18	.716 .284	.687 .267	.661 .252	.636 .238	.612 .226	.591 .215	.570 .205	.486 .167	.374 .122	.255 .079	.142 .042	.061 .018	18
20	.733 .313	.705 .295	.679 .279	.655 .264	.632 .251	.611 .239	.591 .229	.507 .187	.394 .137	.271 .090	.152 .048	.066 .020	20
22	.743 .339	.721 .321	.696 .304	.673 .289	.650 .274	.629 .263	.609 .251	.526 .207	.411 .153	.286 .101	.162 .054	.070 .023	22
24	.762 .364	.736 .345	.711 .327	.688 .312	.666 .293	.646 .285	.626 .273	.543 .226	.423 .168	.300 .112	.171 .061	.075 .026	24
26	.774 .383	.749 .368	.726 .350	.702 .334	.681 .319	.661 .306	.642 .293	.560 .244	.444 .183	.313 .122	.180 .067	.079 .029	26
28	.785 .409	.761 .389	.737 .371	.715 .354	.694 .339	.675 .325	.656 .312	.575 .262	.459 .193	.326 .133	.189 .073	.083 .031	28
30	.795 .430	.771 .409	.749 .391	.727 .374	.707 .358	.688 .344	.669 .331	.589 .273	.473 .212	.339 .143	.197 .079	.088 .034	30
40	.833 .514	.813 .493	.793 .474	.774 .457	.756 .440	.738 .425	.722 .411	.646 .354	.534 .276	.394 .193	.237 .110	.103 .048	40
60	.873 .625	.863 .606	.847 .589	.832 .572	.817 .556	.802 .541	.788 .527	.724 .466	.620 .380	.479 .278	.305 .167	.145 .076	60
100	.921 .745	.910 .729	.899 .714	.883 .700	.878 .687	.867 .674	.857 .661	.807 .606	.722 .521	.593 .407	.407 .265	.209 .129	100
200	.953 .853	.952 .843	.946 .838	.939 .829	.933 .820	.927 .811	.921 .803	.890 .763	.833 .695	.735 .593	.565 .436	.332 .243	200
500	.982 .939	.980 .934	.977 .930	.974 .925	.971 .921	.969 .917	.966 .912	.952 .892	.924 .855	.871 .791	.757 .663	.541 .459	500

16. 泊松 (Poisson) 分布表

$$1 - F(c) = \sum_{k=c}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$c \backslash \lambda$	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000
1	0.000 9995	0.001 9930	0.002 9855	0.003 9760	0.004 9635	0.005 9320	0.006 8756	0.007 8631	0.008 8596	0.009 8502
2	.000 0005	.000 0020	.000 0045	.000 0080	.000 0125	.000 0179	.000 0244	.000 0318	.000 0403	.000 0497
3							.000 0001	.000 0031	.000 0061	.000 0102

$c \backslash \lambda$	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11
0	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000
1	0.019 3013	0.029 5545	0.039 2106	0.048 7706	0.053 2355	0.067 6062	0.076 8837	0.083 0638	0.095 1626	0.104 1659
2	.000 1973	.000 4411	.000 7793	.001 2091	.001 7296	.002 3336	.003 0343	.003 8150	.004 6788	.005 6241
3	.000 0013	.000 0044	.000 0104	.000 0201	.000 0344	.000 0542	.000 0804	.000 1136	.000 1547	.000 2043
4			.000 0001	.000 0003	.000 0005	.000 0009	.000 0016	.000 0025	.000 0033	.000 0056
5										.000 0001

$c \backslash \lambda$	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.20	0.21
0	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000
1	0.113 0793	0.121 9046	0.130 6418	0.139 2920	0.147 8562	0.156 3352	0.164 7293	0.173 0409	0.181 2692	0.189 4153
2	.006 6491	.007 7522	.008 9316	.010 1858	.011 5132	.012 9122	.014 3812	.015 9187	.017 5231	.019 1931
3	.000 2633	.000 3323	.000 4119	.000 5029	.000 6053	.000 7212	.000 8493	.000 9920	.001 1485	.001 3197
4	.000 0079	.000 0107	.000 0143	.000 0187	.000 0240	.000 0304	.000 0379	.000 0467	.000 0563	.000 0635
5	.000 0002	.000 0003	.000 0004	.000 0006	.000 0008	.000 0010	.000 0014	.000 0018	.000 0023	.000 0029
6								.000 0001	.000 0001	.000 0001

$c \backslash \lambda$	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.30	0.40
0	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000
1	0.197 4812	0.205 4664	0.213 3721	0.221 1992	0.228 9484	0.236 6205	0.244 2163	0.251 7364	0.259 1818	0.329 6800
2	.020 9271	.022 7237	.024 5315	.026 4990	.028 4750	.030 5080	.032 5963	.034 7400	.036 9363	.061 5519
3	.001 5060	.001 7033	.001 9266	.002 1615	.002 4135	.002 6329	.002 9701	.003 2755	.003 5995	.007 9263
4	.000 0819	.000 0971	.000 1142	.000 1334	.000 1548	.000 1736	.000 2049	.000 2339	.000 2633	.000 7763
5	.000 0036	.000 0044	.000 0054	.000 0066	.000 0080	.000 0093	.000 0113	.000 0134	.000 0158	.000 0612
6	.000 0001	.000 0002	.000 0002	.000 0003	.000 0003	.000 0004	.000 0005	.000 0006	.000 0008	.000 0040
7										.000 0002

$c \backslash \lambda$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	0.393 469	0.451 138	0.503 415	0.550 671	0.593 430	0.632 121	0.667 129	0.693 808	0.727 463	0.753 403
2	.090 204	.121 901	.155 805	.191 203	.227 518	.264 241	.300 971	.337 373	.373 177	.403 167
3	.014 383	.023 115	.034 142	.047 423	.062 857	.080 301	.099 584	.120 513	.142 833	.166 502
4	.001 752	.003 353	.005 753	.009 080	.013 459	.018 983	.025 742	.033 769	.043 095	.053 725
5	.000 172	.000 394	.000 786	.001 411	.002 344	.003 660	.005 435	.007 746	.010 663	.014 253
6	.000 014	.000 039	.000 090	.000 184	.000 343	.000 594	.000 933	.001 500	.002 231	.003 201
7	.000 001	.000 003	.000 009	.000 021	.000 043	.000 083	.000 149	.000 251	.000 404	.000 622
8			.000 001	.000 002	.000 005	.000 010	.000 020	.000 037	.000 064	.000 107
9						.000 001	.000 002	.000 005	.000 009	.000 016
10								.000 001	.000 001	.000 002

$c \backslash \lambda$	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	0.776 870	0.793 103	0.817 316	0.834 701	0.850 431	0.864 665	0.877 544	.889 197	.899 741	0.909 232
2	.442 175	.475 069	.506 754	.537 163	.566 251	.593 094	.620 385	.645 430	.669 146	.691 559
3	.191 153	.216 642	.242 777	.269 379	.296 280	.323 324	.350 369	.377 286	.403 961	.430 291
4	.065 642	.078 813	.093 189	.108 708	.125 298	.142 877	.161 357	.180 648	.200 633	.221 277

λ	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4
5	0.018 576	0.023 632	0.029 615	0.036 407	0.044 081	0.052 653	0.062 126	0.072 496	0.083 751	0.095 869
6	.004 456	.006 040	.007 999	.010 378	.013 219	.016 564	.020 449	.024 910	.029 976	.035 673
7	.000 926	.001 336	.001 875	.002 569	.003 446	.004 534	.005 862	.007 461	.009 362	.011 594
8	.000 170	.000 260	.000 338	.000 562	.000 793	.001 097	.001 486	.001 978	.002 539	.003 339
9	.000 028	.000 045	.000 072	.000 110	.000 163	.000 237	.000 337	.000 470	.000 642	.000 862
10	.000 004	.000 007	.000 012	.000 019	.000 030	.000 046	.000 069	.000 101	.000 144	.000 202
11	.000 001	.000 001	.000 002	.000 003	.000 005	.000 008	.000 013	.000 020	.000 029	.000 043
12					.000 001	.000 001	.000 002	.000 004	.000 006	.000 008
13								.000 001	.000 001	.000 002

λ	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	0.917 915	0.925 726	0.932 794	0.939 190	0.944 977	0.950 213	0.954 951	0.959 238	0.963 117	0.966 627
2	.712 703	.732 615	.751 340	.768 922	.785 409	.800 852	.815 298	.828 799	.841 402	.853 153
3	.456 187	.481 570	.506 376	.530 546	.554 037	.576 810	.598 837	.620 096	.640 574	.660 260
4	.242 424	.263 998	.285 908	.308 063	.330 377	.352 768	.375 160	.397 480	.419 662	.441 613
5	.108 822	.122 577	.137 092	.152 324	.168 223	.184 737	.201 811	.219 387	.237 410	.255 813
6	.042 021	.049 037	.056 732	.065 110	.074 174	.083 918	.094 334	.105 408	.117 123	.129 453
7	.014 187	.017 170	.020 569	.024 411	.028 717	.033 509	.038 804	.044 619	.050 966	.057 853
8	.004 247	.005 334	.006 621	.008 131	.009 885	.011 905	.014 213	.016 830	.019 777	.023 074
9	.001 140	.001 437	.001 914	.002 433	.003 058	.003 803	.004 683	.005 714	.006 912	.008 293
10	.000 277	.000 376	.000 501	.000 660	.000 858	.001 102	.001 401	.001 762	.002 195	.002 709
11	.000 062	.000 087	.000 120	.000 164	.000 220	.000 292	.000 383	.000 497	.000 638	.000 810
12	.000 013	.000 018	.000 026	.000 037	.000 052	.000 071	.000 097	.000 129	.000 171	.000 223
13	.000 002	.000 004	.000 005	.000 008	.000 011	.000 016	.000 023	.000 031	.000 042	.000 057
14		.000 001	.000 001	.000 002	.000 002	.000 003	.000 005	.000 007	.000 010	.000 014
15						.000 001	.000 001	.000 001	.000 002	.000 003
16										.000 001

λ	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	0.969 803	0.972 676	0.975 276	0.977 629	0.979 758	0.931 634	0.933 427	0.935 004	0.936 481	0.937 723
2	.864 112	.874 311	.883 799	.892 620	.900 815	.908 422	.915 479	.922 023	.928 087	.933 702
3	.679 153	.697 253	.714 567	.731 103	.746 875	.761 897	.776 186	.789 762	.802 645	.814 853
4	.463 367	.484 734	.505 847	.523 515	.546 753	.566 530	.585 818	.604 597	.622 846	.640 552
5	.274 555	.293 532	.312 781	.332 156	.351 635	.371 163	.390 692	.410 173	.429 562	.448 816
6	.142 336	.155 831	.169 912	.184 444	.199 442	.214 870	.230 688	.246 857	.263 333	.280 088
7	.065 238	.073 273	.081 809	.090 892	.100 517	.110 674	.121 352	.132 536	.144 210	.156 355
8	.026 739	.030 739	.035 241	.040 107	.045 402	.051 134	.057 312	.063 943	.071 032	.078 579
9	.009 874	.011 671	.013 703	.015 934	.018 533	.021 363	.024 492	.027 932	.031 693	.035 803
10	.003 315	.004 024	.004 848	.005 799	.006 890	.008 132	.009 540	.011 127	.012 906	.014 890
11	.001 019	.001 271	.001 572	.001 929	.002 349	.002 840	.003 410	.004 069	.004 825	.005 633
12	.000 239	.000 370	.000 470	.000 592	.000 739	.000 915	.001 125	.001 374	.001 666	.002 003
13	.000 076	.000 100	.000 130	.000 168	.000 216	.000 274	.000 345	.000 431	.000 534	.000 653
14	.000 019	.000 025	.000 034	.000 045	.000 059	.000 076	.000 093	.000 126	.000 160	.000 201
15	.000 004	.000 006	.000 008	.000 011	.000 015	.000 020	.000 026	.000 034	.000 045	.000 053
16	.000 001	.000 001	.000 002	.000 003	.000 004	.000 005	.000 007	.000 009	.000 012	.000 016
17				.000 001	.000 001	.000 001	.000 002	.000 002	.000 003	.000 004
18									.000 001	.000 001

λ c	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	0.988 891	0.989 948	0.990 905	0.991 770	0.992 553	0.993 262	0.993 903	0.994 483	0.995 008	0.995 483
2	.938 901	.943 710	.948 157	.952 267	.956 065	.959 572	.962 810	.965 797	.968 553	.971 094
3	.826 422	.837 361	.847 700	.857 461	.866 669	.875 348	.883 522	.891 213	.898 446	.905 242
4	.657 704	.674 294	.690 316	.705 770	.720 655	.734 974	.748 732	.761 935	.774 590	.786 709
5	.467 896	.486 766	.505 391	.523 741	.541 788	.559 507	.576 875	.593 872	.610 482	.626 639
6	.297 070	.314 240	.331 562	.348 994	.366 499	.384 039	.401 580	.419 087	.436 527	.453 863
7	.168 949	.181 971	.195 395	.209 195	.223 345	.237 817	.252 580	.267 607	.282 366	.293 329
8	.086 586	.095 051	.103 969	.113 334	.123 138	.133 372	.144 023	.155 078	.166 523	.178 341
9	.040 257	.045 072	.050 256	.055 817	.061 761	.068 094	.074 818	.081 935	.089 446	.097 350
10	.017 093	.019 527	.022 206	.025 141	.028 345	.031 828	.035 601	.039 674	.044 056	.048 755
11	.006 669	.007 777	.009 022	.010 417	.011 971	.013 695	.015 601	.017 699	.020 000	.022 514
12	.002 404	.002 863	.003 339	.003 992	.004 677	.005 453	.006 328	.007 310	.008 409	.009 632
13	.000 805	.000 979	.001 183	.001 422	.001 699	.002 019	.002 387	.002 809	.003 289	.003 835
14	.000 252	.000 312	.000 385	.000 473	.000 576	.000 698	.000 841	.001 008	.001 202	.001 427
15	.000 074	.000 093	.000 118	.000 147	.000 183	.000 226	.000 278	.000 339	.000 412	.000 493
16	.000 020	.000 026	.000 034	.000 043	.000 055	.000 069	.000 086	.000 108	.000 133	.000 164
17	.000 005	.000 007	.000 009	.000 012	.000 015	.000 020	.000 025	.000 032	.000 041	.000 051
18	.000 001	.000 002	.000 002	.000 003	.000 004	.000 005	.000 007	.000 009	.000 012	.000 015
19			.000 001	.000 001	.000 001	.000 001	.000 002	.000 002	.000 003	.000 004
20								.000 001	.000 001	.000 001

λ c	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0	6.1	6.2	6.3	6.4
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	0.995 913	0.996 302	0.996 654	0.996 972	0.997 261	0.997 521	0.997 757	0.997 971	0.998 164	0.998 338
2	.973 436	.975 594	.977 582	.979 413	.981 098	.982 649	.984 076	.985 388	.986 595	.987 704
3	.911 624	.917 612	.923 227	.928 439	.933 418	.938 031	.942 347	.946 382	.950 154	.953 676
4	.798 301	.809 378	.819 952	.830 037	.839 647	.848 796	.857 499	.865 771	.873 626	.881 081
5	.642 482	.657 850	.672 785	.687 232	.701 335	.714 943	.728 106	.740 823	.753 096	.764 930
6	.471 081	.488 139	.505 015	.521 685	.538 127	.554 320	.570 246	.585 887	.601 228	.616 256
7	.313 964	.329 742	.345 634	.361 609	.377 639	.393 697	.409 755	.425 787	.441 767	.457 671
8	.190 515	.203 025	.215 851	.228 974	.242 371	.256 020	.269 899	.283 934	.298 252	.312 679
9	.105 643	.114 322	.123 382	.132 814	.142 611	.152 763	.163 258	.174 086	.185 233	.196 635
10	.053 777	.059 130	.064 817	.070 844	.077 212	.083 924	.090 980	.098 379	.106 121	.114 201
11	.025 251	.028 222	.031 436	.034 901	.038 627	.042 621	.046 890	.051 441	.056 280	.061 411
12	.010 988	.012 487	.014 138	.015 950	.017 931	.020 092	.022 440	.024 985	.027 734	.030 697
13	.004 451	.005 144	.005 922	.006 790	.007 756	.008 827	.010 012	.011 316	.012 748	.014 316
14	.001 685	.001 981	.002 319	.002 703	.003 138	.003 628	.004 180	.004 797	.005 485	.006 251
15	.000 599	.000 716	.000 852	.001 010	.001 192	.001 400	.001 639	.001 910	.002 217	.002 565
16	.000 200	.000 244	.000 295	.000 356	.000 426	.000 509	.000 605	.000 716	.000 844	.000 992
17	.000 063	.000 078	.000 096	.000 118	.000 144	.000 175	.000 211	.000 254	.000 304	.000 362
18	.000 019	.000 024	.000 030	.000 037	.000 046	.000 057	.000 070	.000 085	.000 104	.000 126
19	.000 005	.000 007	.000 009	.000 011	.000 014	.000 018	.000 022	.000 027	.000 034	.000 041
20	.000 001	.000 002	.000 002	.000 003	.000 004	.000 005	.000 007	.000 008	.000 010	.000 013
21			.000 001	.000 001	.000 001	.000 001	.000 002	.000 002	.000 003	.000 004
22							.000 001	.000 001	.000 001	.000 001

λ c	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0	7.1	7.2	7.3	7.4
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	0.998 497	0.998 640	0.998 769	0.998 836	0.998 922	0.999 038	0.999 175	0.999 253	0.999 324	0.999 389
2	.988 724	.989 661	.990 522	.991 313	.992 038	.992 705	.993 317	.993 878	.994 393	.994 865
3	.956 964	.960 032	.962 894	.965 562	.968 048	.970 364	.972 520	.974 526	.976 393	.978 129
4	.888 150	.894 849	.901 192	.907 194	.912 870	.918 235	.923 301	.928 083	.932 594	.936 847
5	.776 328	.787 296	.797 841	.807 969	.817 689	.827 008	.835 937	.844 484	.852 660	.860 475
6	.630 959	.645 327	.659 351	.673 023	.686 338	.699 292	.711 881	.724 103	.735 957	.747 443



$\lambda \backslash c$	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0	7.1	7.2	7.3	7.4
7	0.473 476	0.489 161	0.504 703	0.520 084	0.535 285	0.550 289	0.565 080	0.579 644	0.593 968	0.608 038
8	.327 242	.341 918	.356 633	.371 514	.386 389	.401 286	.416 183	.431 059	.445 893	.460 667
9	.208 427	.220 443	.232 716	.245 230	.257 967	.270 909	.284 036	.297 332	.310 776	.324 349
10	.122 616	.131 361	.140 430	.149 816	.159 510	.169 504	.179 788	.190 350	.201 180	.212 265
11	.066 839	.072 567	.078 593	.084 934	.091 575	.098 521	.105 771	.113 323	.121 175	.129 323
12	.033 880	.037 291	.040 937	.044 825	.048 961	.053 350	.057 997	.062 906	.068 081	.073 526
13	.016 027	.017 839	.019 910	.022 097	.024 458	.027 000	.029 730	.032 655	.035 782	.039 117
14	.007 100	.008 033	.009 072	.010 208	.011 452	.012 811	.014 292	.015 901	.017 645	.019 531
15	.002 956	.003 395	.003 886	.004 434	.005 042	.005 717	.006 463	.007 285	.008 188	.009 178
16	.001 160	.001 352	.001 569	.001 816	.002 094	.002 407	.002 757	.003 149	.003 586	.004 071
17	.000 430	.000 509	.000 599	.000 703	.000 822	.000 958	.001 113	.001 288	.001 486	.001 709
18	.000 151	.000 182	.000 217	.000 258	.000 306	.000 362	.000 426	.000 500	.000 584	.000 680
19	.000 051	.000 062	.000 075	.000 090	.000 108	.000 130	.000 155	.000 184	.000 218	.000 258
20	.000 016	.000 020	.000 024	.000 030	.000 037	.000 044	.000 054	.000 065	.000 078	.000 093
21	.000 005	.000 006	.000 008	.000 010	.000 012	.000 014	.000 018	.000 022	.000 026	.000 032
22	.000 001	.000 002	.000 002	.000 003	.000 004	.000 005	.000 006	.000 007	.000 009	.000 011
23		.000 001	.000 001	.000 001	.000 001	.000 001	.000 002	.000 002	.000 003	.000 003
24								.000 001	.000 001	.000 001

$\lambda \backslash c$	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0	8.1	8.2	8.3	8.4
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	0.999 447	0.999 500	0.999 547	0.999 590	0.999 629	0.999 665	0.999 698	0.999 725	0.999 751	0.999 777
2	.995 299	.995 696	.996 060	.996 394	.996 700	.996 931	.997 238	.997 473	.997 689	.997 886
3	.979 743	.931 243	.932 636	.933 930	.935 131	.936 246	.937 280	.938 239	.939 129	.939 953
4	.940 855	.944 629	.948 181	.951 523	.954 666	.957 620	.960 395	.963 000	.965 446	.967 740
5	.867 933	.875 061	.881 855	.888 330	.894 497	.900 368	.905 951	.911 260	.916 303	.921 092
6	.758 564	.769 319	.779 713	.789 749	.799 431	.808 764	.817 753	.826 406	.834 727	.842 723
7	.621 845	.635 379	.648 631	.661 593	.674 260	.686 626	.698 696	.710 438	.721 879	.733 007
8	.475 361	.489 958	.504 440	.518 791	.532 993	.547 039	.560 908	.574 591	.588 074	.601 348
9	.333 033	.351 808	.365 657	.379 559	.393 497	.407 453	.421 408	.435 347	.449 252	.463 106
10	.223 592	.235 149	.246 920	.258 891	.271 043	.283 376	.295 858	.308 481	.321 226	.334 080
11	.137 762	.146 487	.155 492	.164 770	.174 314	.184 114	.194 163	.204 450	.214 965	.225 699
12	.079 241	.085 230	.091 493	.098 030	.104 841	.111 924	.119 278	.126 900	.134 787	.142 934
13	.042 666	.046 434	.050 427	.054 649	.059 104	.063 797	.068 731	.073 907	.079 330	.084 999
14	.021 565	.023 753	.026 103	.028 620	.031 311	.034 181	.037 236	.040 481	.043 923	.047 564
15	.010 260	.011 441	.012 725	.014 118	.015 627	.017 257	.019 014	.020 903	.022 931	.025 103
16	.004 608	.005 202	.005 857	.006 577	.007 367	.008 231	.009 174	.010 201	.011 316	.012 525
17	.001 959	.002 239	.002 572	.002 901	.003 289	.003 718	.004 192	.004 715	.005 291	.005 922
18	.000 790	.000 915	.001 055	.001 215	.001 393	.001 594	.001 819	.002 070	.002 349	.002 659
19	.000 303	.000 355	.000 415	.000 484	.000 562	.000 650	.000 751	.000 864	.000 992	.001 136
20	.000 111	.000 132	.000 158	.000 184	.000 216	.000 253	.000 298	.000 344	.000 400	.000 463
21	.000 039	.000 046	.000 056	.000 067	.000 079	.000 094	.000 111	.000 131	.000 154	.000 180
22	.000 013	.000 016	.000 019	.000 023	.000 028	.000 033	.000 040	.000 048	.000 057	.000 067
23	.000 004	.000 005	.000 003	.000 003	.000 009	.000 011	.000 014	.000 017	.000 020	.000 024
24	.000 001	.000 002	.000 002	.000 002	.000 003	.000 004	.000 005	.000 006	.000 007	.000 008
25			.000 001	.000 001	.000 001	.000 001	.000 001	.000 002	.000 002	.000 003
26								.000 001	.000 001	.000 001

$\lambda \backslash c$	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0	9.1	9.2	9.3	9.4
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	0.999 797	0.999 816	0.999 833	0.999 849	0.999 864	0.999 877	0.999 888	0.999 899	0.999 909	0.999 917
2	.998 067	.993 233	.998 384	.998 523	.998 650	.998 766	.998 872	.998 969	.999 058	.999 140
3	.990 717	.991 424	.992 080	.992 686	.993 248	.993 768	.994 249	.994 693	.995 105	.995 485
4	.969 891	.971 907	.973 797	.975 566	.977 223	.978 774	.980 224	.981 580	.982 848	.984 033
5	.925 636	.929 946	.934 032	.937 902	.941 567	.945 036	.948 313	.951 420	.954 353	.957 122

c \ λ	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0	9.1	9.2	9.3	9.4
6	0.850 403	0.857 772	0.864 840	0.871 613	0.878 100	0.884 309	0.890 249	0.895 926	0.901 350	0.906 529
7	.743 822	.754 324	.764 512	.774 390	.783 958	.793 219	.802 177	.810 835	.819 197	.827 267
8	.614 403	.627 229	.639 819	.652 166	.664 262	.676 103	.687 684	.699 000	.710 050	.720 829
9	.476 895	.490 603	.504 216	.517 719	.531 101	.544 347	.557 443	.570 391	.583 166	.595 765
10	.347 026	.360 049	.373 132	.386 260	.399 419	.412 592	.425 765	.438 924	.452 054	.465 142
11	.236 638	.247 772	.259 089	.270 577	.282 222	.294 012	.305 933	.317 974	.330 119	.342 356
12	.151 338	.159 992	.168 892	.178 030	.187 399	.196 992	.206 800	.216 815	.227 029	.237 430
13	.090 917	.097 084	.103 499	.110 162	.117 072	.124 227	.131 624	.139 261	.147 133	.155 238
14	.051 411	.055 467	.059 736	.064 221	.068 925	.073 851	.079 001	.084 376	.089 973	.095 807
15	.027 425	.029 902	.032 540	.035 343	.038 317	.041 466	.044 795	.048 309	.052 010	.055 903
16	.013 833	.015 245	.016 767	.018 402	.020 157	.022 036	.024 044	.026 188	.028 470	.030 897
17	.006 613	.007 367	.008 190	.009 084	.010 055	.011 106	.012 242	.013 468	.014 788	.016 206
18	.003 002	.003 382	.003 800	.004 261	.004 766	.005 320	.005 924	.006 584	.007 302	.008 033
19	.001 297	.001 478	.001 679	.001 903	.002 151	.002 426	.002 731	.003 066	.003 435	.003 840
20	.000 535	.000 616	.000 707	.000 811	.000 926	.001 056	.001 201	.001 362	.001 542	.001 742
21	.000 211	.000 245	.000 285	.000 330	.000 381	.000 439	.000 505	.000 579	.000 662	.000 755
22	.000 079	.000 094	.000 110	.000 129	.000 150	.000 175	.000 203	.000 235	.000 272	.000 314
23	.000 029	.000 034	.000 041	.000 048	.000 057	.000 067	.000 078	.000 092	.000 107	.000 125
24	.000 010	.000 012	.000 014	.000 017	.000 021	.000 025	.000 029	.000 034	.000 041	.000 048
25	.000 003	.000 004	.000 005	.000 006	.000 007	.000 009	.000 010	.000 012	.000 015	.000 018
26	.000 001	.000 001	.000 002	.000 002	.000 002	.000 003	.000 004	.000 004	.000 005	.000 006
27			.000 001	.000 001	.000 001	.000 001	.000 001	.000 001	.000 002	.000 002
28								.000 001	.000 001	.000 001

c \ λ	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10.0
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	0.999 925	0.999 932	0.999 939	0.999 945	0.999 950	0.999 955
2	.999 214	.999 282	.999 344	.999 401	.999 453	.999 501
3	.995 833	.996 161	.996 461	.996 738	.996 994	.997 231
4	.985 140	.936 174	.937 139	.938 040	.938 830	.939 664
5	.959 737	.932 205	.934 533	.936 729	.938 793	.940 747
6	.911 472	.916 185	.920 673	.924 959	.929 035	.932 914
7	.835 051	.842 553	.849 779	.856 735	.863 426	.869 859
8	.731 337	.741 572	.751 533	.761 221	.770 636	.779 779
9	.608 177	.620 394	.632 410	.644 217	.655 809	.667 180
10	.478 174	.491 138	.504 021	.516 812	.529 493	.542 070
11	.354 672	.367 052	.379 484	.391 955	.404 451	.416 960
12	.248 010	.258 759	.269 665	.280 719	.291 909	.303 224
13	.163 570	.172 124	.180 895	.189 876	.199 062	.208 444
14	.101 864	.108 143	.114 659	.121 395	.128 355	.135 536
15	.059 992	.064 279	.068 767	.073 458	.078 355	.083 458
16	.033 473	.036 202	.039 090	.042 139	.045 355	.048 740
17	.017 727	.019 357	.021 093	.022 956	.024 936	.027 042
18	.008 923	.009 844	.010 832	.011 898	.013 045	.014 278
19	.004 234	.004 770	.005 300	.005 877	.006 505	.007 187
20	.001 962	.002 207	.002 476	.002 772	.003 098	.003 454
21	.000 859	.000 976	.001 106	.001 250	.001 411	.001 588
22	.000 361	.000 414	.000 473	.000 540	.000 616	.000 700
23	.000 145	.000 168	.000 194	.000 224	.000 258	.000 296
24	.000 056	.000 066	.000 077	.000 089	.000 104	.000 120
25	.000 021	.000 025	.000 029	.000 034	.000 040	.000 047
26	.000 007	.000 009	.000 011	.000 013	.000 015	.000 018
27	.000 003	.000 003	.000 004	.000 004	.000 005	.000 006
28	.000 001	.000 001	.000 001	.000 002	.000 002	.000 002
29				.000 001	.000 001	.000 001

17. 泊松 (Poisson) 分布参数 λ 的置信区间表

c	1- α		0.99		0.98		0.95		0.90		1- α
0	0.0000	5.30	0.0000	4.61	0.0000	3.69	0.0000	3.00	0.0000	3.00	0
1	0.0050	7.43	0.0101	6.64	0.0253	5.57	0.0513	4.74	0.0513	4.74	1
2	0.103	9.27	0.149	8.41	0.242	7.22	0.355	6.30	0.355	6.30	2
3	0.333	10.98	0.436	10.05	0.619	8.77	0.818	7.75	0.818	7.75	3
4	0.672	12.59	0.823	11.60	1.09	10.24	1.37	9.15	1.37	9.15	4
5	1.03	14.15	1.23	13.11	1.62	11.67	1.97	10.51	1.97	10.51	5
6	1.54	15.66	1.79	14.57	2.20	13.06	2.61	11.84	2.61	11.84	6
7	2.04	17.13	2.33	16.00	2.81	14.42	3.29	13.15	3.29	13.15	7
8	2.57	18.58	2.91	17.40	3.45	15.76	3.98	14.43	3.98	14.43	8
9	3.13	20.00	3.51	18.78	4.12	17.03	4.70	15.71	4.70	15.71	9
10	3.72	21.40	4.13	20.14	4.80	18.39	5.43	16.96	5.43	16.96	10
11	4.32	22.78	4.77	21.49	5.49	19.68	6.17	18.21	6.17	18.21	11
12	4.94	24.14	5.43	22.82	6.20	20.96	6.92	19.44	6.92	19.44	12
13	5.58	25.50	6.10	24.14	6.92	22.23	7.69	20.67	7.69	20.67	13
14	6.23	26.84	6.78	25.45	7.65	23.49	8.46	21.89	8.46	21.89	14
15	6.89	28.16	7.48	26.74	8.40	24.74	9.25	23.10	9.25	23.10	15
16	7.57	29.43	8.18	28.03	9.15	25.93	10.04	24.30	10.04	24.30	16
17	8.25	30.79	8.89	29.31	9.90	27.22	10.83	25.50	10.83	25.50	17
18	8.94	32.09	9.62	30.58	10.67	28.45	11.63	26.69	11.63	26.69	18
19	9.64	33.38	10.35	31.85	11.44	29.67	12.44	27.88	12.44	27.88	19
20	10.35	34.67	11.08	33.10	12.22	30.89	13.25	29.06	13.25	29.06	20
21	11.07	35.95	11.82	34.36	13.00	32.10	14.07	30.24	14.07	30.24	21
22	11.79	37.22	12.57	35.60	13.79	33.31	14.89	31.42	14.89	31.42	22
23	12.52	38.48	13.33	36.84	14.58	34.51	15.72	32.59	15.72	32.59	23
24	13.25	39.74	14.09	38.08	15.38	35.71	16.55	33.75	16.55	33.75	24
25	14.00	41.00	14.85	39.31	16.18	36.90	17.38	34.92	17.38	34.92	25
26	14.74	42.25	15.62	40.53	16.98	38.10	18.22	36.08	18.22	36.08	26
27	15.49	43.50	16.40	41.76	17.79	39.28	19.06	37.23	19.06	37.23	27
28	16.24	44.74	17.17	42.93	18.61	40.47	19.90	38.39	19.90	38.39	28
29	17.00	45.93	17.96	44.19	19.42	41.65	20.75	39.54	20.75	39.54	29
30	17.77	47.21	18.74	45.40	20.24	42.83	21.59	40.69	21.59	40.69	30
35	21.64	53.32	22.72	51.41	24.38	43.68	25.87	46.40	25.87	46.40	35
40	25.59	59.36	26.77	57.35	28.58	54.47	30.20	52.07	30.20	52.07	40
45	29.60	65.34	30.88	63.23	32.82	60.21	34.56	57.69	34.56	57.69	45
50	33.66	71.27	35.03	69.07	37.11	65.92	38.96	63.29	38.96	63.29	50

18. 柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov) 检验的临界值 ($D_{n\alpha}$) 表

$$P(D_n > D_{n\alpha}) = \alpha$$

n	α					n	α				
	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01		0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.90000	0.95000	0.97500	0.99000	0.99500	31	0.18732	0.21412	0.23788	0.26596	0.28530
2	.63377	.77639	.84189	.90000	.92929	32	.18445	.21085	.23424	.26189	.28094
3	.56481	.63604	.70760	.78456	.82900	33	.18171	.20771	.23076	.25801	.27677
4	.49265	.56522	.62394	.63887	.73424	34	.17909	.20472	.22743	.25429	.27279
5	.44693	.50945	.56323	.62718	.66353	35	.17659	.20185	.22425	.25073	.26897
6	.41037	.46799	.51926	.57741	.61661	36	.17418	.19910	.22119	.24732	.26532
7	.38148	.43607	.48342	.53844	.57581	37	.17188	.19646	.21826	.24404	.26180
8	.35831	.40962	.45427	.50654	.54179	38	.16966	.19392	.21544	.24039	.25843
9	.33910	.38746	.43001	.47960	.51332	39	.16753	.19148	.21273	.23786	.25518
10	.32260	.36366	.40925	.45662	.48893	40	.16547	.18913	.21012	.23494	.25205
11	.30829	.35242	.39122	.43670	.46770	41	.16349	.18637	.20760	.23213	.24901
12	.29577	.33815	.37543	.41918	.44905	42	.16158	.18468	.20517	.22941	.24613
13	.28470	.32549	.36143	.40362	.43247	43	.15974	.18257	.20283	.22679	.24332
14	.27431	.31417	.34890	.38970	.41762	44	.15796	.18053	.20056	.22426	.24060
15	.26588	.30397	.33760	.37713	.40420	45	.15623	.17856	.19837	.22181	.23793
16	.25778	.29472	.32733	.36571	.39201	46	.15457	.17665	.19625	.21944	.23544
17	.25039	.28627	.31796	.35528	.38036	47	.15295	.17481	.19420	.21715	.23298
18	.24360	.27851	.30936	.34569	.37062	48	.15139	.17302	.19221	.21493	.23059
19	.23735	.27136	.30143	.33685	.36117	49	.14987	.17128	.19023	.21277	.22828
20	.23156	.26473	.29408	.32866	.35241	50	.14840	.16959	.18841	.21068	.22604
21	.22617	.25358	.28724	.32104	.34427	55	.14164	.16186	.17981	.20107	.21574
22	.22115	.25283	.28087	.31394	.33666	60	.13573	.15511	.17231	.19267	.20673
23	.21645	.24746	.27490	.30728	.32954	65	.13052	.14913	.16567	.18525	.19377
24	.21205	.24242	.26931	.30104	.32236	70	.12536	.14381	.15975	.17863	.19167
25	.20790	.23763	.26404	.29516	.31657	75	.12167	.13901	.15442	.17268	.18523
26	.20399	.23320	.25907	.28962	.31064	80	.11787	.13467	.14960	.16728	.17949
27	.20030	.22893	.25438	.28433	.30502	85	.11442	.13072	.14520	.16236	.17421
28	.19680	.22497	.24993	.27942	.29971	90	.11125	.12709	.14117	.15736	.16938
29	.19348	.22117	.24571	.27471	.29466	95	.10833	.12375	.13746	.15371	.16493
30	.19032	.21756	.24170	.27023	.28937	100	.10563	.12067	.13403	.14937	.16081

19. D_n 的极限分布表

$$Q(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n < \lambda / \sqrt{n}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\lambda^2 k^2 / 2}$$

λ	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	λ
0.2	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000004	0.2
0.3	.000009	.000021	.000046	.000091	.000171	.000303	.000511	.000826	.001285	.001929	0.3
0.4	.002808	.003972	.005476	.007377	.009730	.012590	.016005	.020022	.024682	.030017	0.4
0.5	.036055	.042814	.050306	.058584	.067487	.077183	.087577	.098656	.110395	.122760	0.5
0.6	.135718	.149229	.163225	.177153	.192677	.207987	.223637	.239582	.255780	.272189	0.6
0.7	.288765	.305471	.322265	.339113	.355981	.372833	.389640	.406372	.423002	.439505	0.7
0.8	.455857	.472041	.488030	.503808	.519366	.534682	.549744	.564546	.579070	.593316	0.8
0.9	.607270	.620928	.634286	.647338	.660082	.672516	.684630	.696444	.707940	.719126	0.9
1.0	.730000	.740566	.750826	.760780	.770434	.779794	.788860	.797636	.806128	.814342	1.0
1.1	.822282	.829950	.837356	.844502	.851394	.858038	.864442	.870612	.876548	.882258	1.1
1.2	.887750	.893030	.898104	.902972	.907648	.912132	.916432	.920556	.924505	.928288	1.2
1.3	.931908	.935370	.938682	.941848	.944872	.947756	.950512	.953142	.955650	.958040	1.3
1.4	.960318	.962486	.964452	.966216	.968382	.970158	.971846	.973448	.974970	.976412	1.4
1.5	.977782	.979080	.980310	.981476	.982578	.983622	.984610	.985544	.986426	.987260	1.5
1.6	.988048	.988791	.989492	.990154	.990777	.991364	.991917	.992438	.992928	.993389	1.6
1.7	.993823	.994230	.994612	.994972	.995309	.995625	.995922	.996200	.996460	.996704	1.7
1.8	.996932	.997146	.997346	.997533	.997707	.997870	.998023	.998145	.998237	.998421	1.8
1.9	.998536	.998644	.998744	.998837	.998924	.999004	.999079	.999149	.999213	.999273	1.9
2.0	.999329	.999380	.999428	.999474	.999516	.999552	.999588	.999620	.999650	.999680	2.0
2.1	.999705	.999728	.999750	.999770	.999790	.999806	.999822	.999838	.999852	.999864	2.1
2.2	.999874	.999886	.999896	.999904	.999912	.999920	.999926	.999934	.999940	.999944	2.2
2.3	.999949	.999954	.999958	.999962	.999965	.999968	.999970	.999973	.999976	.999978	2.3
2.4	.999980	.999982	.999984	.999986	.999987	.999988	.999988	.999989	.999991	.999992	2.4

20. 斯米尔诺夫 (Смирнов) 检验的临界值 ($m(n_1, n_2, \alpha)$) 表

($m(n_1, n_2, \alpha)$ 为满足 $P(k D_{n_1, n_2} \geq r) \leq \alpha$ 的 r 中之最小整数,

k 为 n_1, n_2 的最小公倍数)

n_1, n_2	α			k	n_1, n_2	α			k	n_1, n_2	α			k					
	10%	5%	1%			10%	5%	1%			10%	5%	1%						
3 3	3	—	—	3	12 12	6	7	8	12	16 10	38	42	50	80	19 4	49	53	64	76
					11	64	72	86	132	9	69	78	94	144	3	42	45	54	57
4 4	4	4	—	4	10	30	33	40	60	8	9	10	11	16	2	32	36	33	33
3	12	—	—	12	9	19	21	25	36	7	59	64	77	112					
					8	13	15	17	24	6	27	30	36	48	20 20	8	9	11	20
5 5	4	5	5	5	7	46	53	60	84	5	48	54	64	80	19	144	160	187	330
4	16	20	—	20	6	8	8	10	12	4	11	12	14	16	18	63	76	91	130
3	15	15	—	15	5	36	43	50	60	3	36	39	45	48	17	130	146	175	340
2	10	—	—	10	4	9	9	11	12	2	14	15	—	16	16	32	35	42	80
					3	9	10	12	12						15	25	27	32	60
6 6	5	5	6	6	2	11	12	—	12	17 17	8	8	10	17	14	57	63	76	140
5	24	24	30	30						16	109	124	143	272	13	108	120	143	260
4	9	10	12	12	13 13	7	7	9	13	15	105	116	142	255	12	26	29	35	60
3	5	6	—	6	12	71	81	95	156	14	100	111	134	238	11	96	107	127	220
2	6	—	—	6	11	67	75	91	143	13	96	105	127	221	10	10	11	12	20
					10	64	70	84	130	12	90	100	119	204	9	84	93	111	180
7 7	5	6	6	7	9	59	65	78	117	11	85	93	110	187	8	20	22	26	40
6	23	30	36	42	8	54	62	72	104	10	79	89	106	170	7	72	79	93	140
5	25	29	35	35	7	50	56	65	91	9	74	82	99	153	6	33	36	44	60
4	21	24	28	28	6	46	52	59	73	8	63	77	88	136	5	12	13	16	20
3	18	21	—	21	5	40	45	52	65	7	61	63	84	119	4	13	15	17	20
2	14	—	—	14	4	35	39	48	52	6	56	62	73	102	3	42	48	57	60
					3	30	33	39	39	5	50	55	68	85	2	17	19	20	20
8 8	5	6	7	8	2	24	26	—	26	4	44	48	60	63					
7	34	40	48	56						3	36	42	48	51	21 21	8	9	11	21
6	15	17	20	24	14 14	7	8	9	14	2	30	32	—	34	22 22	9	10	11	22
5	27	29	35	40	13	78	89	104	182						23 23	9	10	11	23
4	6	7	8	8	12	39	43	52	84	18 18	8	9	10	18	24 24	9	10	12	24
3	21	21	—	24	11	73	82	96	154	17	118	133	164	306	25 25	9	10	12	25
2	8	8	—	8	10	34	37	45	70	16	58	64	77	144	26 26	9	10	12	26
					9	63	70	84	126	15	37	41	49	90	27 27	9	10	12	27
9 9	6	6	7	9	8	29	32	38	56	14	52	58	70	126	28 28	10	11	13	23
8	40	46	55	72	7	8	9	11	14	13	99	110	131	234	29 29	10	11	13	29
7	36	42	49	63	6	24	27	32	42	12	16	18	21	36	30 30	10	11	13	30
6	11	13	15	18	5	42	45	56	70	11	88	97	118	198					
5	30	35	40	45	4	19	21	24	28	10	41	46	54	90	31 31	10	11	13	31
4	27	28	36	36	3	33	36	42	42	9	9	10	12	18	32 32	10	11	13	32
3	7	8	9	9	2	12	13	—	14	8	36	40	47	72	33 33	10	12	14	33
2	18	18	—	18						7	65	72	87	126	34 34	11	12	14	34
					15 15	7	8	9	15	6	11	12	14	18	35 35	11	12	14	35
10 10	6	7	8	10	14	92	98	123	210	5	52	60	70	90	36 36	11	12	14	36
9	50	53	63	90	13	87	96	115	195	4	23	25	30	36	37 37	11	12	14	37
8	22	24	30	40	12	28	31	36	60	3	13	15	17	18	38 38	11	12	14	38
7	40	46	56	70	11	76	84	102	165	2	16	17	—	18	39 39	11	12	14	39
6	18	20	24	30	10	15	16	20	30						40 40	11	13	—	40
5	7	8	9	10	9	38	25	30	45	19 19	8	9	10	19					
4	14	15	18	20	8	60	67	81	120	18	133	142	176	342					
3	24	27	30	30	7	56	62	75	105	17	126	141	166	323					
2	9	10	—	10	6	17	19	23	30	16	120	133	160	304					
					5	10	11	12	15	15	114	127	152	285					
11 11	6	7	8	11	4	40	44	52	60	14	110	121	143	266					
10	57	60	77	110	3	11	12	14	15	13	104	114	138	247					
9	52	59	70	99	2	26	28	—	30	12	99	108	130	228					
8	48	53	64	88						11	92	102	122	209					
7	44	48	59	77	16 16	7	8	10	16	10	85	94	113	190					
6	38	43	54	66	15	101	114	133	240	9	80	89	107	171					
5	35	39	45	55	14	48	53	63	112	8	74	82	98	152					
4	29	33	40	44	13	91	101	121	208	7	69	76	91	133					
3	27	30	33	33	12	22	24	29	48	6	64	70	83	114					
2	20	22	—	22	11	80	89	106	176	5	56	61	71	95					

21. 一次抽样方案的接收概率计算表

c	P(d)													
	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	
0	0.00501	0.0101	0.0253	0.0513	0.105	0.238	0.693	1.336	2.303	2.996	3.689	4.605	5.293	
1	0.103	0.149	0.242	0.355	0.532	0.961	1.678	2.693	3.890	4.744	5.572	6.638	7.430	
2	0.338	0.436	0.619	0.818	1.102	1.727	2.674	3.920	5.322	6.296	7.224	8.406	9.274	
3	0.672	0.823	1.090	1.366	1.745	2.535	3.672	5.109	6.681	7.754	8.763	10.045	10.978	
4	1.078	1.279	1.623	1.970	2.433	3.369	4.671	6.274	7.994	9.154	10.242	11.605	12.594	
5	1.537	1.785	2.202	2.613	3.152	4.219	5.670	7.423	9.275	10.513	11.668	13.108	14.150	
6	2.037	2.330	2.814	3.286	3.895	5.083	6.670	8.558	10.532	11.842	13.060	14.571	15.660	
7	2.571	2.906	3.454	3.981	4.666	5.956	7.669	9.684	11.771	13.148	14.422	16.000	17.134	
8	3.132	3.507	4.115	4.695	5.432	6.838	8.669	10.802	12.995	14.434	15.763	17.403	18.578	
9	3.717	4.130	4.795	5.426	6.221	7.726	9.669	11.914	14.206	15.705	17.085	18.783	19.998	
10	4.321	4.771	5.491	6.169	7.021	8.620	10.668	13.020	15.407	16.962	18.390	20.145	21.398	
11	4.943	5.428	6.201	6.924	7.829	9.519	11.668	14.121	16.598	18.208	19.682	21.490	22.779	
12	5.580	6.099	6.922	7.690	8.646	10.422	12.668	15.217	17.782	19.442	20.962	22.821	24.145	
13	6.231	6.732	7.654	8.464	9.470	11.329	13.668	16.310	18.958	20.668	22.230	24.139	25.496	
14	6.893	7.477	8.396	9.246	10.300	12.239	14.668	17.400	20.128	21.886	23.490	25.446	26.836	
15	7.566	8.181	9.144	10.035	11.135	13.152	15.668	18.486	21.292	23.093	24.741	26.743	28.166	
16	8.249	8.895	9.902	10.831	11.976	14.068	16.668	19.570	22.452	24.302	25.984	28.031	29.484	
17	8.942	9.616	10.666	11.633	12.822	14.986	17.668	20.652	23.606	25.500	27.220	29.310	30.792	
18	9.644	10.346	11.438	12.442	13.672	15.907	18.663	21.731	24.756	26.692	28.448	30.581	32.092	
19	10.353	11.082	12.216	13.254	14.525	16.830	19.668	22.803	25.902	27.879	29.671	31.845	33.383	
20	11.069	11.825	12.999	14.072	15.383	17.755	20.668	23.883	27.045	29.062	30.888	33.103	34.663	
21	11.791	12.574	13.787	14.894	16.244	18.682	21.668	24.956	28.184	30.241	32.102	34.355	35.947	
22	12.520	13.329	14.580	15.719	17.108	19.610	22.668	26.023	29.320	31.416	33.309	35.601	37.219	
23	13.255	14.088	15.377	16.548	17.975	20.540	23.668	27.093	30.453	32.586	34.512	36.841	38.485	
24	13.995	14.853	16.178	17.382	18.844	21.471	24.668	28.167	31.584	33.752	35.710	38.077	39.745	
25	14.740	15.623	16.984	18.218	19.717	22.404	25.667	29.234	32.711	34.916	36.905	39.308	41.000	
26	15.490	16.397	17.793	19.058	20.592	23.338	26.667	30.300	33.836	36.077	38.096	40.535	42.252	
27	16.245	17.175	18.606	19.900	21.469	24.273	27.667	31.365	34.959	37.234	39.284	41.757	43.497	
28	17.004	17.957	19.422	20.746	22.348	25.209	28.667	32.428	36.080	38.389	40.468	42.975	44.738	
29	17.767	18.742	20.241	21.594	23.229	26.147	29.667	33.491	37.198	39.541	41.649	44.190	45.976	
30	18.534	19.532	21.063	22.444	24.113	27.086	30.667	34.552	38.315	40.690	42.827	45.401	47.210	
31	19.305	20.324	21.888	23.298	24.998	28.025	31.667	35.613	39.430	41.838	44.002	46.609	48.440	
32	20.079	21.120	22.716	24.152	25.885	28.966	32.667	36.672	40.543	42.982	45.174	47.813	49.666	
33	20.856	21.919	23.546	25.010	26.774	29.907	33.667	37.731	41.654	44.125	46.344	49.015	50.888	
34	21.638	22.721	24.379	25.870	27.664	30.849	34.667	38.788	42.764	45.266	47.512	50.213	52.108	
35	22.422	23.525	25.214	26.731	28.556	31.792	35.667	39.845	43.872	46.404	48.676	51.409	53.324	
36	23.203	24.333	26.052	27.594	29.450	32.736	36.667	40.901	44.978	47.540	49.840	52.601	54.538	
37	23.998	25.143	26.891	28.460	30.345	33.631	37.667	41.957	46.083	48.676	51.000	53.791	55.748	
38	24.791	25.955	27.733	29.327	31.241	34.626	38.667	43.011	47.187	49.808	52.158	54.979	56.956	
39	25.586	26.770	28.576	30.196	32.139	35.572	39.667	44.065	48.289	50.940	53.314	56.164	58.160	
40	26.384	27.587	29.422	31.066	33.038	36.519	40.667	45.118	49.390	52.069	54.469	57.347	59.363	
41	27.184	28.406	30.270	31.938	33.938	37.466	41.667	46.171	50.490	53.197	55.622	58.523	60.563	
42	27.986	29.223	31.120	32.812	34.839	38.414	42.667	47.223	51.539	54.324	56.772	59.717	61.761	
43	28.791	30.051	31.970	33.686	35.742	39.363	43.667	48.274	52.686	55.449	57.921	60.884	62.956	
44	29.598	30.877	32.824	34.563	36.646	40.312	44.667	49.325	53.782	56.572	59.068	62.059	64.150	
45	30.408	31.704	33.678	35.441	37.550	41.262	45.667	50.375	54.878	57.695	60.214	63.231	65.340	
46	31.219	32.534	34.534	36.320	38.456	42.212	46.667	51.425	55.972	58.816	61.358	64.402	66.529	
47	32.032	33.365	35.392	37.200	39.363	43.163	47.667	52.474	57.065	59.936	62.500	65.571	67.716	
48	32.848	34.193	36.250	38.082	40.270	44.115	48.667	53.522	58.158	61.054	63.641	66.738	68.901	
49	33.664	35.032	37.111	38.965	41.179	45.067	49.667	54.571	59.249	62.171	64.780	67.903	70.084	

22. 一次抽样方案计算表
(接收概率曲线通过 $(p_1, 1-\alpha)$ 和 (p_2, β))

p_2/p_1					p_2/p_1				
c	$\alpha=0.05$ $\beta=0.10$	$\alpha=0.05$ $\beta=0.05$	$\alpha=0.05$ $\beta=0.01$	np_1	c	$\alpha=0.01$ $\beta=0.10$	$\alpha=0.01$ $\beta=0.05$	$\alpha=0.01$ $\beta=0.01$	np_1
0	44.890	58.404	89.781	0.052	0	229.105	298.073	458.210	0.010
1	10.946	13.349	18.681	0.355	1	26.184	31.933	44.686	0.149
2	6.509	7.699	10.280	0.818	2	12.206	14.439	19.278	0.436
3	4.890	5.675	7.352	1.366	3	8.115	9.418	12.202	0.823
4	4.057	4.646	5.890	1.970	4	6.249	7.156	9.072	1.279
5	3.549	4.023	5.017	2.613	5	5.195	5.889	7.343	1.785
6	3.206	3.604	4.435	3.286	6	4.520	5.032	6.253	2.330
7	2.957	3.303	4.019	3.981	7	4.050	4.524	5.506	2.906
8	2.768	3.074	3.707	4.695	8	3.705	4.115	4.962	3.507
9	2.618	2.895	3.462	5.426	9	3.440	3.803	4.548	4.130
10	2.497	2.750	3.265	6.169	10	3.229	3.555	4.222	4.771
11	2.397	2.630	3.104	6.924	11	3.058	3.354	3.959	5.428
12	2.312	2.528	2.968	7.690	12	2.915	3.188	3.742	6.099
13	2.240	2.442	2.852	8.464	13	2.795	3.047	3.559	6.782
14	2.177	2.367	2.752	9.246	14	2.692	2.927	3.403	7.477
15	2.122	2.302	2.665	10.035	15	2.603	2.823	3.269	8.181
16	2.073	2.244	2.588	10.831	16	2.524	2.732	3.151	8.895
17	2.029	2.192	2.520	11.633	17	2.455	2.652	3.048	9.616
18	1.990	2.145	2.458	12.442	18	2.393	2.580	2.956	10.346
19	1.954	2.103	2.403	13.254	19	2.337	2.516	2.874	11.082
20	1.922	2.065	2.352	14.072	20	2.287	2.458	2.799	11.825
21	1.892	2.030	2.307	14.894	21	2.241	2.405	2.738	12.574
22	1.865	1.999	2.265	15.719	22	2.200	2.357	2.671	13.329
23	1.840	1.969	2.226	16.548	23	2.162	2.313	2.615	14.088
24	1.817	1.942	2.191	17.382	24	2.126	2.272	2.564	14.853
25	1.795	1.917	2.158	18.218	25	2.094	2.235	2.516	15.623
26	1.775	1.893	2.127	19.058	26	2.064	2.200	2.472	16.397
27	1.757	1.871	2.098	19.900	27	2.035	2.168	2.431	17.175
28	1.739	1.850	2.071	20.746	28	2.009	2.138	2.393	17.957
29	1.723	1.831	2.046	21.594	29	1.985	2.110	2.358	18.742
30	1.707	1.813	2.023	22.444	30	1.962	2.083	2.324	19.532
31	1.692	1.796	2.001	23.298	31	1.940	2.059	2.293	20.324
32	1.679	1.780	1.980	24.152	32	1.920	2.035	2.264	21.120
33	1.665	1.764	1.960	25.010	33	1.900	2.013	2.236	21.919
34	1.653	1.750	1.941	25.870	34	1.882	1.992	2.210	22.721
35	1.641	1.736	1.923	26.731	35	1.865	1.973	2.185	23.525
36	1.630	1.723	1.906	27.594	36	1.848	1.954	2.162	24.333
37	1.619	1.710	1.890	28.460	37	1.833	1.936	2.139	25.143
38	1.609	1.698	1.875	29.327	38	1.818	1.920	2.118	25.956
39	1.599	1.687	1.860	30.196	39	1.804	1.903	2.098	26.770
40	1.590	1.676	1.846	31.066	40	1.790	1.887	2.079	27.587
41	1.581	1.666	1.833	31.938	41	1.777	1.873	2.060	28.406
42	1.572	1.656	1.820	32.812	42	1.765	1.859	2.043	29.228
43	1.564	1.646	1.807	33.686	43	1.753	1.845	2.026	30.051
44	1.556	1.637	1.796	34.563	44	1.742	1.832	2.010	30.877
45	1.548	1.628	1.784	35.441	45	1.731	1.820	1.994	31.704
46	1.541	1.619	1.773	36.320	46	1.720	1.808	1.980	32.534
47	1.534	1.611	1.763	37.200	47	1.710	1.796	1.965	33.365
48	1.527	1.603	1.752	38.082	48	1.701	1.785	1.952	34.198
49	1.521	1.596	1.743	38.965	49	1.691	1.775	1.938	35.052

23. 符号检验表

$$P(S \leq S_\alpha) = \alpha$$

α	α				α	α				α	α								
	0.01	0.05	0.10	0.25		0.01	0.05	0.10	0.25		0.01	0.05	0.10	0.25					
1					24	5	6	7	8	47	14	16	17	19	69	23	25	27	29
2					25	5	7	7	9	48	14	16	17	19	70	23	26	27	29
3				0	26	6	7	8	9	49	15	17	18	19	71	24	26	28	30
4				0	27	6	7	8	10	50	15	17	18	20	72	24	27	28	30
5			0	0	28	6	8	9	10	51	15	18	19	20	73	25	27	28	31
6		0	0	1	29	7	8	9	10	52	16	18	19	21	74	25	28	29	31
7		0	0	1	30	7	9	10	11	53	16	18	20	21	75	25	28	29	32
8	0	0	1	1	31	7	9	10	11	54	17	19	20	22	76	26	28	30	32
9	0	1	1	2	32	8	9	10	12	55	17	19	20	22	77	26	29	30	32
10	0	1	1	2	33	8	10	11	12	56	17	20	21	23	78	27	29	31	33
11	0	1	2	3	34	9	10	11	13	57	18	20	21	23	79	27	30	31	33
12	1	2	2	3	35	9	11	12	13	58	18	21	22	24	80	28	30	32	34
13	1	2	3	3	36	9	11	12	14	59	19	21	22	24	81	28	31	32	34
14	1	2	3	4	37	10	12	13	14	60	19	21	23	25	82	28	31	33	35
15	2	3	3	4	38	10	12	13	14	61	20	22	23	25	83	29	32	33	35
16	2	3	4	5	39	11	12	13	15	62	20	22	24	25	84	29	32	33	36
17	2	4	4	5	40	11	13	14	15	63	20	23	24	26	85	30	32	34	36
18	3	4	5	6	41	11	13	14	16	64	21	23	24	26	86	30	33	34	37
19	3	4	5	6	42	12	14	15	16	65	21	24	25	27	87	31	33	35	37
20	3	5	5	6	43	12	14	15	17	66	22	24	25	27	88	31	34	35	38
21	4	5	6	7	44	13	15	16	17	67	22	25	26	28	89	31	34	36	38
22	4	5	6	7	45	13	15	16	18	68	22	25	26	28	90	32	35	36	39
23	4	6	7	8	46	13	15	16	18										

24. 秩和检验表

$$P(T_1 < T < T_2) = 1 - \alpha$$

n_1	n_2	$\alpha=0.025$		$\alpha=0.05$		n_1	n_2	$\alpha=0.025$		$\alpha=0.05$	
		T_1	T_2	T_1	T_2			T_1	T_2	T_1	T_2
2	4			3	11	5	5	18	37	19	36
	5			3	13		6	19	41	20	40
	6	3	15	4	14		7	20	45	22	43
	7	3	17	4	16		8	21	49	23	47
	8	3	19	4	18		9	22	53	25	50
	9	3	21	4	20		10	24	56	26	54
	10	4	22	5	21	6	6	26	52	28	50
3	3			6	15		7	28	56	30	54
	4	6	18	7	17		8	29	61	32	58
	5	6	21	7	20		9	31	65	33	63
	6	7	23	8	22		10	33	69	35	67
	7	8	25	9	24	7	7	37	68	39	66
	8	8	28	9	27		8	39	73	41	71
	9	9	30	10	29		9	41	78	43	76
	10	9	33	11	31		10	43	83	46	80
4	4	11	25	12	24	8	8	49	87	52	84
	5	12	28	13	27		9	51	93	54	90
	6	12	32	14	30		10	54	98	57	95
	7	13	35	15	33	9	9	63	108	66	105
	8	14	38	16	36		10	66	114	69	111
	9	15	41	17	39	10	10	79	131	83	127
	10	16	44	18	42						

25. 游程总数检验表

$R_{1\alpha}$ 表示满足 $P(R \leq R_1) \leq \alpha$ 的 R_1 中之最大整数

$R_{2\alpha}$ 表示满足 $P(R \geq R_2) \leq \alpha$ 的 R_2 中之最小整数

$R_{1,0.025}$																					$R_{2,0.025}$																				
$n_2 \backslash n_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$n_2 \backslash n_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
2																				2																					
3																				3																					
4																				4																					
5				2	2															5			9	10																	
6				2	2	3	3													6			9	10	11																
7				2	2	3	3	3												7			11	12	13																
8				2	3	3	3	4	4											8			11	12	13	14															
9				2	3	3	4	4	5	5										9			13	14	14	15															
10				2	3	3	4	5	5	5	6									10			13	14	15	16	16														
11				2	3	4	4	5	5	6	6	7								11			13	14	15	16	17	17													
12				2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7						12			13	14	16	16	17	18	19												
13				2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8					13			15	16	17	18	19	20													
14				2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9				14			15	16	17	18	19	20	20	21											
15				2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10			15			15	16	18	18	19	20	21	22	22										
16				2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11		16			17	18	19	20	21	21	22	23	23										
17				2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	11	17			17	18	19	20	21	22	23	23	24	25									
18				2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	18			17	18	19	20	21	22	23	24	25	25	26								
19				2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	13	19			17	18	20	21	22	23	23	24	25	26	26	27							
20				2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	20			17	18	20	21	22	23	24	25	25	26	27	27	28						

$R_{1,0.05}$																					$R_{2,0.05}$																				
$n_2 \backslash n_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$n_2 \backslash n_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
2																				2																					
3																				3																					
4				2																4			7	8																	
5				2	2	3														5			9	9																	
6				2	3	3	3													6			9	10	11																
7				2	3	3	4	4												7			9	10	11	12															
8				2	2	3	3	4	4	5										8			11	12	13	13															
9				2	2	3	4	4	5	5	6									9			11	12	13	14	14														
10				2	3	3	4	5	5	6	6	6								10			11	12	13	14	15	16													
11				2	3	3	4	5	5	6	6	7	7							11			13	14	15	16	17														
12				2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8						12			13	14	15	16	17	17	18												
13				2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9					13			13	14	15	16	17	18	18	19											
14				2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	10				14			13	14	16	17	17	18	19	20	20										
15				2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11			15			15	16	17	18	19	20	21	21											
16				2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	11		16			15	16	17	18	19	20	21	21	22	23									
17				2	3	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	12		17			15	16	17	18	19	20	21	22	22	23	24								
18				2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	13		18			15	16	18	19	20	21	21	22	23	24	24	25							
19				2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12	13	14		19			15	16	18	19	20	21	22	23	23	24	25	25	26					
20				2	3	4	5	6	7	8	9	9	10	11	11	12	12	13	14		20			15	17	18	19	20	21	22	23	24	25	25	26	27	27				

$n_1=n_2$	$\alpha=0.025$		$\alpha=0.05$		$n_1=n_2$	$\alpha=0.025$		$\alpha=0.05$		$n_1=n_2$	$\alpha=0.025$		$\alpha=0.05$	
	$R_{1\alpha}$	$R_{2\alpha}$	$R_{1\alpha}$	$R_{2\alpha}$		$R_{1\alpha}$	$R_{2\alpha}$	$R_{1\alpha}$	$R_{2\alpha}$		$R_{1\alpha}$	$R_{2\alpha}$	$R_{1\alpha}$	$R_{2\alpha}$
10	6	16	6	16	33	25	43	26	42	56	46	68	47	67
11	7	17	7	17	34	26	44	27	43	57	47	69	48	68
12	7	19	8	18	35	27	45	28	44	58	47	71	49	69
13	8	20	9	19	36	28	46	29	45	59	48	72	50	70
14	9	21	10	20	37	29	47	30	46	60	49	73	51	71
15	10	22	11	21	38	30	48	31	47	61	50	74	52	72
16	11	23	11	23	39	30	50	32	48	62	51	75	53	73
17	11	25	12	24	40	31	51	33	49	63	52	76	54	74
18	12	26	13	25	41	32	52	34	50	64	53	77	55	75
19	13	27	14	26	42	33	53	35	51	65	54	78	56	76
20	14	28	15	27	43	34	54	35	53	66	55	79	57	77
21	15	29	16	28	44	35	55	36	54	67	56	80	58	78
22	16	30	17	29	45	36	56	37	55	68	57	81	58	80
23	16	32	17	31	46	37	57	38	56	69	58	82	59	81
24	17	33	18	32	47	38	58	39	57	70	58	84	60	82
25	18	34	19	33	48	38	60	40	58	71	59	85	61	83
26	19	35	20	34	49	39	61	41	59	72	60	86	62	84
27	20	36	21	35	50	40	62	42	60	73	61	87	63	85
28	21	37	22	36	51	41	63	43	61	74	62	88	64	86
29	22	38	23	37	52	42	64	44	62	75	63	89	65	87
30	22	40	24	38	53	43	65	45	63	76	64	90	66	88
31	23	41	25	39	54	44	66	45	65	77	65	91	67	89
32	24	42	25	41	55	45	67	46	66	78	66	92	68	90

26. 游程长度检验表

$$P(L \geq L_p) = p$$

L_p	n									
	4	5	6	7	8	9	10			
5	.23	.04								
6	.33	.09	.01							
7		.14	.03							
8		.20	.06	.01						
9		.25	.08	.02	.005					
10		.29	.11	.03	.005					
11		.34	.13	.04	.010	.005				
12		.38	.16	.06	.015	.005				
13			.18	.07	.020	.005				
14			.21	.08	.030	.010				
15			.23	.09	.035	.010	.005			
16			.26	.11	.040	.015	.005			
17			.28	.12	.045	.015	.005			
18			.30	.13	.050	.020	.005			
19			.32	.14	.060	.020	.010			
20			.35	.16	.065	.025	.010			

27. 极差系数 d_n 和极差分布的分位数表

n	d_n	$1/d_n$	下侧分位数(%)						上侧分位数(%)					
			0.1	0.5	1.0	2.5	5.0	10.0	10.0	5.0	2.5	1.0	0.5	0.1
2	1.12833	0.8862	0.00	0.01	0.02	0.04	0.09	0.18	2.33	2.77	3.17	3.64	3.97	4.65
3	1.69257	0.5908	0.06	0.13	0.19	0.30	0.43	0.62	2.90	3.31	3.68	4.12	4.42	5.06
4	2.05875	0.4857	0.20	0.34	0.43	0.59	0.76	0.93	3.24	3.63	3.93	4.40	4.69	5.31
5	2.32593	0.4299	0.37	0.55	0.67	0.85	1.03	1.26	3.48	3.86	4.20	4.60	4.89	5.43
6	2.53441	0.3946	0.53	0.75	0.87	1.07	1.25	1.49	3.66	4.03	4.36	4.76	5.03	5.62
7	2.70436	0.3698	0.69	0.92	1.05	1.25	1.44	1.63	3.81	4.17	4.49	4.88	5.15	5.73
8	2.84720	0.3512	0.83	1.08	1.20	1.41	1.60	1.84	3.93	4.29	4.60	4.99	5.25	5.82
9	2.97003	0.3367	0.97	1.21	1.34	1.55	1.74	1.97	4.04	4.39	4.70	5.08	5.34	5.90
10	3.07751	0.3249	1.08	1.33	1.47	1.67	1.86	2.09	4.13	4.47	4.78	5.16	5.42	5.97
11	3.17287	0.3152	1.19	1.45	1.58	1.78	1.97	2.20	4.21	4.55	4.86	5.23	5.49	6.04
12	3.25846	0.3069	1.29	1.55	1.68	1.88	2.07	2.30	4.28	4.62	4.92	5.29	5.55	6.09
13	3.33598	0.2998	1.39	1.64	1.77	1.98	2.16	2.39	4.35	4.68	4.99	5.35	5.60	6.14
14	3.40676	0.2935	1.47	1.72	1.86	2.06	2.24	2.47	4.41	4.74	5.04	5.40	5.65	6.19
15	3.47183	0.2880	1.55	1.80	1.93	2.14	2.32	2.54	4.47	4.80	5.09	5.45	5.70	6.23
16	3.53198	0.2831	1.62	1.88	2.01	2.21	2.39	2.61	4.52	4.85	5.14	5.49	5.74	6.27
17	3.58788	0.2787	1.69	1.94	2.07	2.27	2.45	2.67	4.57	4.89	5.18	5.54	5.78	6.31
18	3.64006	0.2747	1.76	2.01	2.14	2.34	2.52	2.73	4.61	4.93	5.22	5.57	5.82	6.35
19	3.68896	0.2711	1.82	2.07	2.20	2.39	2.57	2.79	4.65	4.97	5.26	5.61	5.86	6.38
20	3.73495	0.2677	1.88	2.12	2.25	2.45	2.63	2.84	4.69	5.01	5.30	5.65	5.89	6.41

28. 正交多项式表

($n=2-30$) [注]

2	3		4			5				6				
$2\psi_1$	ψ_1	$3\psi_2$	$2\psi_1$	ψ_2	$\frac{10}{3}\psi_3$	ψ_1	ψ_2	$\frac{5}{6}\psi_3$	$\frac{35}{12}\psi_4$	$2\psi_1$	$\frac{3}{2}\psi_2$	$\frac{5}{3}\psi_3$	$\frac{7}{12}\psi_4$	$\frac{21}{10}\psi_5$
-1	-1	+1	-3	+1	-1	-2	+2	-1	+1	-5	+5	-5	+1	-1
+1	0	-2	-1	-1	+3	-1	-1	+2	-4	-3	-1	+7	-3	+5
	+1	+1	+1	-1	-3	0	-2	0	+6	-1	-4	+4	+2	-10
			+3	+1	+1	+1	-1	-2	-4	+1	-4	-4	+2	+10
						+2	+2	+1	+1	+3	-1	-7	-3	-5
										+5	+5	+5	+1	+1
2	2	6	20	4	20	10	14	10	70	70	84	180	28	252
7					8					9				
ψ_1	ψ_2	$\frac{1}{6}\psi_3$	$\frac{7}{12}\psi_4$	$\frac{7}{20}\psi_5$	$2\psi_1$	ψ_2	$\frac{2}{3}\psi_3$	$\frac{7}{12}\psi_4$	$\frac{7}{10}\psi_5$	ψ_1	$3\psi_2$	$\frac{5}{6}\psi_3$	$\frac{7}{12}\psi_4$	$\frac{3}{20}\psi_5$
-3	+5	-1	+3	-1	-7	+7	-7	+7	-7	-4	+28	-14	+14	-4
-2	0	+1	-7	+4	-5	+1	+5	-13	+23	-3	+7	+7	-21	+11
-1	-3	+1	+1	-5	-3	-3	+7	-3	-17	-2	-8	+13	-11	-4
0	-4	0	+6	0	-1	-5	+3	+9	-15	-1	-17	+9	+9	-9
+1	-3	-1	+1	+5	+1	-5	-3	+9	+15	0	-20	0	+18	0
+2	0	-1	-7	-4	+3	-3	-7	-3	+17	+1	-17	-9	+9	+9
+3	+5	+1	+3	+1	+5	+1	-5	-13	-23	+2	-8	-13	-11	+4
					+7	+7	+7	+7	+7	+3	+7	-7	-21	-11
										+4	+28	+14	+14	+4
28	84	6	154	84	168	168	264	616	2,184	60	2,772	990	2,002	468

[注] 更详细的表,可参看 [22]、[4]、[1] 和 [23]。其中 [22] 列到 $n=104$, [4] 列到 $n=75$, [1] 对 $\psi_1-\psi_6$ 列到 $n=52$, [23] 对 $\psi_1-\psi_9$ 列到 $n=52$ 。

10					11					12					13				
$2\psi_1$	$\frac{1}{2}\psi_2$	$\frac{5}{3}\psi_3$	$\frac{5}{12}\psi_4$	$\frac{1}{10}\psi_5$	ψ_1	ψ_2	$\frac{5}{6}\psi_3$	$\frac{1}{12}\psi_4$	$\frac{1}{40}\psi_5$	$2\psi_1$	$3\psi_2$	$\frac{2}{3}\psi_3$	$\frac{7}{24}\psi_4$	$\frac{3}{20}\psi_5$	ψ_1	ψ_2	$\frac{1}{6}\psi_3$	$\frac{7}{12}\psi_4$	$\frac{7}{120}\psi_5$
-9	+6	-42	+18	-6	-5	+15	-30	+6	-3	-11	+55	-33	+33	-33	-6	+22	-11	+99	-22
-7	+2	+14	-22	+14	-4	+6	+6	-6	+6	-9	+25	+3	-27	+57	-5	+11	0	-66	+33
-5	-1	+35	-17	-1	-3	-1	+22	-6	+1	-7	+1	+21	-33	+21	-4	+2	+6	-96	+18
-3	-3	+31	+8	-11	-2	-6	+23	-1	-4	-5	-17	+25	-13	-29	-3	-5	+8	-54	-11
-1	-4	+12	+18	-6	-1	-9	+14	+4	-4	-3	-29	+19	+12	-44	-2	-10	+7	+11	-26
+1	-4	-12	+18	+6	0	-10	0	+6	0	-1	-35	+7	+23	-20	-1	-13	+4	+64	-20
+3	-3	-31	+3	+11	+1	-9	-14	+4	+4	+1	-35	-7	+23	+20	0	-14	0	+84	0
+5	-1	-35	-17	+1	+2	-6	-23	-1	+4	+3	-29	-19	+12	+44	+1	-13	-4	+64	+20
+7	+2	-14	-22	-14	+3	-1	-22	-6	-1	+5	-17	-25	-13	+29	+2	-10	-7	+11	+26
+9	+6	+42	+18	+6	+4	+6	-6	-6	-6	+7	+1	-21	-33	-21	+3	-5	-3	-54	+11
					+5	+15	+30	+6	+3	+9	+25	-3	-27	-57	+4	+2	-6	-96	-18
										+11	+55	+33	+33	+33	+5	+11	0	-66	-33
															+6	+22	+11	+99	+22
132					110					12,012					182				
380					858					572					2,002				
2,860					4,290					8,008					572				
780					286					15,912					68,068				
6,188																			
14					15					16					17 ^[注]				
$2\psi_1$	$\frac{1}{2}\psi_2$	$\frac{5}{3}\psi_3$	$\frac{7}{12}\psi_4$	$\frac{7}{80}\psi_5$	ψ_1	$3\psi_2$	$\frac{5}{6}\psi_3$	$\frac{35}{12}\psi_4$	$\frac{21}{20}\psi_5$	$2\psi_1$	ψ_2	$\frac{10}{3}\psi_3$	$\frac{7}{12}\psi_4$	$\frac{1}{10}\psi_5$	ψ_1	ψ_2	$\frac{1}{6}\psi_3$	$\frac{1}{12}\psi_4$	$\frac{1}{20}\psi_5$
-13	+13	-143	+143	-143	-7	+91	-91	+1001	-1001	-15	+35	-455	+273	-143	-8	+40	-23	+52	-104
-11	+7	-11	-77	+187	-6	+52	-13	-429	+1144	-13	+21	-91	-91	+143	-7	+25	-7	-13	+91
-9	+2	+66	-132	+132	-5	+19	+35	-869	+979	-11	+9	+143	-221	+143	-6	+12	+7	-39	+104
-7	-2	+98	-92	-23	-4	-8	+58	-704	+44	-9	-1	+267	-201	+33	-5	+1	+15	-39	+39
-5	-5	+95	-13	-139	-3	-29	+61	-249	-751	-7	-9	+301	-101	-77	-4	-8	+18	-24	-36
-3	-7	+67	+63	-145	-2	-44	+49	+251	-1000	-5	-15	+265	+23	-131	-3	-15	+17	-3	-83
-1	-8	+24	+108	-60	-1	-53	+27	+621	-675	-3	-19	+179	+129	-115	-2	-20	+13	+17	-88
+1	-8	-24	+108	+60	0	-56	0	+756	0	-1	-21	+63	+189	-45	-1	-23	+7	+31	-55
+3	-7	-67	+63	+145	+1	-53	-27	+621	+675						0	-24	0	+36	0
+5	-5	-95	-13	+139	+2	-44	-49	+251	+1000										
+7	-2	-98	-92	+23	+3	-29	-61	-249	+751										
+9	+2	-66	-132	-132	+4	-8	-58	-704	-44										
+11	+7	+11	-77	-187	+5	+19	-35	-869	-979										
+13	+13	+143	+143	+143	+6	+52	+18	-429	-1144										
					+7	+91	+91	+1001	+1001										
910					280					1,360					408				
97,240					39,780					1,007,760					3,876				
235,144					10,581,480					201,552					100,776				
728					37,128					5,712					7,752				
136,136					6,466,460					470,288					16,796				
18					19					20					21				
$2\psi_1$	$\frac{3}{2}\psi_2$	$\frac{1}{3}\psi_3$	$\frac{1}{12}\psi_4$	$\frac{3}{10}\psi_5$	ψ_1	ψ_2	$\frac{5}{6}\psi_3$	$\frac{7}{12}\psi_4$	$\frac{1}{40}\psi_5$	$2\psi_1$	ψ_2	$\frac{10}{3}\psi_3$	$\frac{35}{24}\psi_4$	$\frac{7}{20}\psi_5$	ψ_1	$3\psi_2$	$\frac{5}{6}\psi_3$	$\frac{7}{12}\psi_4$	$\frac{21}{40}\psi_5$
-17	+63	-63	+63	-884	-9	+51	-204	+612	-102	-19	+57	-969	+1938	-1938	-10	+190	-295	+969	-3376
-15	+44	-20	-12	+676	-8	+34	-68	-68	+68	-17	+39	-357	-102	+1122	-9	+133	-114	0	+1938
-13	+23	+13	-47	+871	-7	+19	+28	-388	+98	-15	+23	+85	-1122	+1802	-8	+82	+12	-510	+3468
-11	+5	+33	-51	+429	-6	+6	+89	-453	+58	-13	+9	+377	-1402	+1222	-7	+37	+98	-680	+2613
-9	-10	+42	-36	-156	-5	-5	+120	-354	-3	-11	-3	+539	-1187	+187	-6	-2	+149	-615	+783
-7	-23	+42	-12	-588	-4	-14	+126	-168	-54	-9	-13	+591	-687	-771	-5	-35	+170	-406	-1063
-5	-31	+35	+13	-733	-3	-21	+112	+42	-79	-7	-21	+553	-77	-1351	-4	-62	+166	-130	-2354
-3	-37	+23	+33	-583	-2	-26	+83	+227	-74	-5	-27	+445	+503	-1441	-3	-83	+142	+150	-2819
-1	-40	+8	+44	-220	-1	-29	+44	+352	-44	-3	-31	+287	+948	-1076	-2	-98	+103	+385	-2444
					0	-30	0	+396	0	-1	-33	+99	+1188	-396	-1	-107	+54	+540	-1404
															0	-110	0	+594	0
1,938					570					2,660					770				
23,256					213,180					4,903,140					432,630				
28,424					89,148					81,201,800					121,687,020				
					13,566					17,556					201,894				
					2,283,132					22,881,320					5,720,330				

[注] 从 $n=16$ 起只列出前一半的数值以及 n 为奇数时的中间的数值。后一半的数值与前一半对称 (当 i 为偶数时) 或反对称 (当 i 为奇数时)。例如, 对 $n=16, \frac{10}{3}\psi_3$ 的后一半的数值为 $-63, -179, -265, -301, -267, -143, +91, +455$ 。最后一行仍然是整个数值的平方和。

22					23					24				
$2\psi_1$	$\frac{1}{2}\psi_2$	$\frac{1}{3}\psi_3$	$\frac{7}{12}\psi_4$	$\frac{7}{30}\psi_5$	ψ_1	ψ_2	$\frac{1}{6}\psi_3$	$\frac{7}{12}\psi_4$	$\frac{1}{60}\psi_5$	$2\psi_1$	$3\psi_2$	$\frac{10}{3}\psi_3$	$\frac{1}{12}\psi_4$	$\frac{3}{10}\psi_5$
-21	+35	-133	+1197	-2261	-11	+77	-77	+1463	-209	-23	+253	-1771	+253	-4807
-19	+25	-57	+57	+969	-10	+56	-35	+133	+76	-21	+187	-847	+33	+1463
-17	+16	0	-570	+1938	-9	+37	-3	-627	+171	-19	+127	-138	-97	+3743
-15	+8	+40	-810	+1598	-8	+20	+20	-950	+152	-17	+73	+391	-157	+3553
-13	+1	+65	-775	+663	-7	+5	+35	-955	+77	-15	+25	+745	-165	+2071
-11	-5	+77	-563	-363	-6	-8	+43	-747	-12	-13	-17	+949	-137	+169
-9	-10	+78	-258	-1153	-5	-19	+45	-417	-87	-11	-53	+1023	-87	-1551
-7	-14	+70	+70	-1554	-4	-28	+42	-42	-132	-9	-83	+987	-27	-2721
-5	-17	+55	+365	-1509	-3	-35	+35	+315	-141	-7	-107	+861	+33	-3171
-3	-19	+35	+585	-1079	-2	-40	+25	+605	-116	-5	-125	+665	+85	-2893
-1	-20	+12	+702	-390	-1	-43	+13	+793	-65	-3	-137	+419	+123	-2005
					0	-44	0	+858	0	-1	-143	+143	+143	-715
3,542 96,140 40,562,340					1,012 32,890 340,860					4,600 17,760,600 177,928,920				
7,084 8,749,740					35,420 13,123,110					394,680 394,680				
25					26					27				
ψ_1	ψ_2	$\frac{5}{6}\psi_3$	$\frac{5}{12}\psi_4$	$\frac{1}{20}\psi_5$	$2\psi_1$	$\frac{1}{2}\psi_2$	$\frac{5}{3}\psi_3$	$\frac{7}{12}\psi_4$	$\frac{1}{10}\psi_5$	ψ_1	$3\psi_2$	$\frac{1}{6}\psi_3$	$\frac{7}{12}\psi_4$	$\frac{21}{40}\psi_5$
-12	+92	-506	+1513	-1012	-25	+50	-1150	+2530	-2530	-13	+325	-130	+2990	-16445
-11	+69	-253	+253	+253	-23	+33	-598	+506	+506	-12	+250	-70	+690	+2530
-10	+43	-55	-517	+743	-21	+27	-161	-759	+1771	-11	+181	-22	-782	+10379
-9	+29	+93	-897	+753	-19	+17	+171	-1419	+1881	-10	+118	+15	-1587	+12144
-8	+12	+196	-932	+433	-17	+8	+408	-1614	+1323	-9	+61	+42	-1872	+9174
-7	-3	+259	-857	+119	-15	0	+560	-1470	+482	-8	+10	+60	-1770	+4188
-6	-16	+287	-597	-236	-13	-7	+637	-1099	-377	-7	-35	+70	-1400	-1162
-5	-27	+285	-267	-501	-11	-13	+649	-599	-1067	-6	-74	+73	-867	-5723
-4	-36	+258	+78	-636	-9	-18	+606	-54	-1482	-5	-107	+70	-262	-8803
-3	-43	+211	+393	-631	-7	-22	+518	+466	-1582	-4	-134	+62	+338	-10058
-2	-43	+149	+643	-500	-5	-25	+395	+905	-1381	-3	-155	+50	+870	-9479
-1	-51	+77	+803	-275	-3	-27	+247	+1221	-935	-2	-170	+35	+1285	-7304
0	-52	0	+853	0	-1	-23	+84	+1336	-330	-1	-179	+18	+1543	-3960
										0	-182	0	+1638	0
1,300 1,480,050 7,803,900					5,850 7,803,900 48,384,180					1,638 101,790 2,032,135,530				
53,820 14,307,150					16,380 40,060,020					712,530 56,448,210				
28					29					30				
$2\psi_1$	ψ_2	$\frac{2}{3}\psi_3$	$\frac{7}{24}\psi_4$	$\frac{7}{20}\psi_5$	ψ_1	ψ_2	$\frac{5}{6}\psi_3$	$\frac{7}{12}\psi_4$	$\frac{7}{40}\psi_5$	$2\psi_1$	$\frac{3}{2}\psi_2$	$\frac{5}{3}\psi_3$	$\frac{35}{12}\psi_4$	$\frac{3}{10}\psi_5$
-27	+117	-535	+1755	-13455	-14	+126	-819	+4095	-8190	-29	+203	-1327	+23751	-16965
-25	+91	-325	+455	+1495	-13	+99	-463	+1170	+585	-27	+161	-1071	+7371	+585
-23	+67	-115	-395	+8395	-12	+74	-182	-780	+4810	-25	+122	-450	-3744	+9360
-21	+45	+49	-379	+9321	-11	+51	+44	-1930	+5885	-23	+86	+46	-10504	+11960
-19	+25	+171	-1074	+7866	-10	+30	+215	-2441	+4958	-21	+53	+427	-13749	+10535
-17	+7	+255	-1050	+4132	-9	+11	+336	-2460	+2946	-19	+23	+703	-14249	+6821
-15	-9	+305	-870	+22	-8	-6	+412	-2120	+556	-17	-4	+834	-12704	+2176
-13	-23	+325	-590	-3718	-7	-21	+443	-1540	-1694	-15	-28	+980	-9744	-2384
-11	-35	+319	-259	-6457	-6	-34	+449	-825	-3454	-13	-49	+1001	-5929	-6149
-9	-45	+291	+81	-7837	-5	-45	+420	-66	-4521	-11	-67	+957	-1749	-9679
-7	-53	+245	+395	-7931	-4	-54	+366	+660	-4813	-9	-82	+858	+2376	-9768
-5	-59	+185	+655	-6701	-3	-61	+292	+1290	-4373	-7	-94	+714	+6096	-9408
-3	-63	+115	+840	-4456	-2	-66	+203	+1775	-3298	-5	-103	+535	+9131	-7753
-1	-65	+39	+936	-1560	-1	-69	+104	+2030	-1763	-3	-109	+331	+11271	-5033
					0	-70	0	+2184	0	-1	-112	+112	+12376	-1768
7,308 2,103,660 1,354,757,040					2,030 4,207,320 500,671,080					8,990 21,360,240 2,145,733,200				
95,004 19,634,160					113,274 107,987,880					302,064 3,671,587,920				

29. 正交拉丁方表

正交拉丁方的完全系

3×3

I	II
1 2 3	1 2 3
2 3 1	3 1 2
3 1 2	2 3 1

4×4

I	II	III
1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
2 1 4 3	3 4 1 2	4 3 2 1
3 4 1 2	4 3 2 1	2 1 4 3
4 3 2 1	2 1 4 3	3 4 1 2

5×5

I	II	III	IV
1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5
2 3 4 5 1	3 4 5 1 2	4 5 1 2 3	5 1 2 3 4
3 4 5 1 2	5 1 2 3 4	2 3 4 5 1	4 5 1 2 3
4 5 1 2 3	2 3 4 5 1	5 1 2 3 4	3 4 5 1 2
5 1 2 3 4	4 5 1 2 3	3 4 5 1 2	2 3 4 5 1

7×7

I	II	III
1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7
2 3 4 5 6 7 1	3 4 5 6 7 1 2	4 5 6 7 1 2 3
3 4 5 6 7 1 2	5 6 7 1 2 3 4	7 1 2 3 4 5 6
4 5 6 7 1 2 3	7 1 2 3 4 5 6	3 4 5 6 7 1 2
5 6 7 1 2 3 4	2 3 4 5 6 7 1	6 7 1 2 3 4 5
6 7 1 2 3 4 5	4 5 6 7 1 2 3	2 3 4 5 6 7 1
7 1 2 3 4 5 6	6 7 1 2 3 4 5	5 6 7 1 2 3 4
IV	V	VI
1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7
5 6 7 1 2 3 4	6 7 1 2 3 4 5	7 1 2 3 4 5 6
2 3 4 5 6 7 1	4 5 6 7 1 2 3	6 7 1 2 3 4 5
6 7 1 2 3 4 5	2 3 4 5 6 7 1	5 6 7 1 2 3 4
3 4 5 6 7 1 2	7 1 2 3 4 5 6	4 5 6 7 1 2 3
7 1 2 3 4 5 6	5 6 7 1 2 3 4	3 4 5 6 7 1 2
4 5 6 7 1 2 3	3 4 5 6 7 1 2	2 3 4 5 6 7 1

8×8

I	II	III	IV
1 2 3 4 5 6 7 8	1 2 3 4 5 6 7 8	1 2 3 4 5 6 7 8	1 2 3 4 5 6 7 8
2 1 4 3 6 5 8 7	5 6 7 8 1 2 3 4	7 8 5 6 3 4 1 2	8 7 6 5 4 3 2 1
3 4 1 2 7 8 5 6	2 1 4 3 6 5 8 7	5 6 7 8 1 2 3 4	7 8 5 6 3 4 1 2
4 3 2 1 8 7 6 5	6 5 8 7 2 1 4 3	3 4 1 2 7 8 5 6	2 1 4 3 6 5 8 7
5 6 7 8 1 2 3 4	7 8 5 6 3 4 1 2	8 7 6 5 4 3 2 1	4 3 2 1 8 7 6 5
6 5 8 7 2 1 4 3	3 4 1 2 7 8 5 6	2 1 4 3 6 5 8 7	5 6 7 8 1 2 3 4
7 8 5 6 3 4 1 2	8 7 6 5 4 3 2 1	4 3 2 1 8 7 6 5	6 5 8 7 2 1 4 3
8 7 6 5 4 3 2 1	4 3 2 1 8 7 6 5	6 5 8 7 2 1 4 3	3 4 1 2 7 8 5 6
V	VI	VII	
1 2 3 4 5 6 7 8	1 2 3 4 5 6 7 8	1 2 3 4 5 6 7 8	
4 3 2 1 8 7 6 5	6 5 8 7 2 1 4 3	3 4 1 2 7 8 5 6	
8 7 6 5 4 3 2 1	4 3 2 1 8 7 6 5	6 5 8 7 2 1 4 3	
5 6 7 8 1 2 3 4	7 8 5 6 3 4 1 2	8 7 6 5 4 3 2 1	
6 5 8 7 2 1 4 3	3 4 1 2 7 8 5 6	2 1 4 3 6 5 8 7	
7 8 5 6 3 4 1 2	8 7 6 5 4 3 2 1	4 3 2 1 8 7 6 5	
3 4 1 2 7 8 5 6	2 1 4 3 6 5 8 7	5 6 7 8 1 2 3 4	
2 1 4 3 6 5 8 7	5 6 7 8 1 2 3 4	7 8 5 6 3 4 1 2	

9×9

<p>I</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 2 3 1 5 6 4 8 9 7 3 1 2 6 4 5 9 7 8 4 5 6 7 8 9 1 2 3 5 6 4 8 9 7 2 3 1 6 4 5 9 7 8 3 1 2 7 8 9 1 2 3 4 5 6 8 9 7 2 3 1 5 6 4 9 7 8 3 1 2 6 4 5</p>	<p>II</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 7 8 9 1 2 3 4 5 6 4 5 6 7 8 9 1 2 3 2 3 1 5 6 4 8 9 7 8 9 7 2 3 1 5 6 4 5 6 4 8 9 7 2 3 1 3 1 2 6 4 5 9 7 8 9 7 8 3 1 2 6 4 5 6 4 5 9 7 8 3 1 2</p>	<p>III</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 9 7 8 3 1 2 6 4 5 5 6 4 8 9 7 2 3 1 6 4 5 9 7 8 3 1 2 2 3 1 5 6 4 8 9 7 7 8 9 1 2 3 4 5 6 8 9 7 2 3 1 5 6 4 4 5 6 7 8 9 1 2 3 3 1 2 6 4 5 9 7 8</p>	<p>IV</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 8 9 7 2 3 1 5 6 4 6 4 5 9 7 8 3 1 2 9 7 8 3 1 2 6 4 5 4 5 6 7 8 9 1 2 3 2 3 1 5 6 4 8 9 7 5 6 4 8 9 7 2 3 1 3 1 2 6 4 5 9 7 8 7 8 9 1 2 3 4 5 6</p>
<p>V</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 3 1 2 6 4 5 9 7 8 2 3 1 5 6 4 8 9 7 7 8 9 1 2 3 4 5 6 9 7 8 3 1 2 6 4 5 8 9 7 2 3 1 5 6 4 4 5 6 7 8 9 1 2 3 6 4 5 9 7 8 3 1 2 5 6 4 8 9 7 2 3 1</p>	<p>VI</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 4 5 6 7 8 9 1 2 3 7 8 9 1 2 3 4 5 6 3 1 2 6 4 5 9 7 8 6 4 5 9 7 8 3 1 2 9 7 8 3 1 2 6 4 5 2 3 1 5 6 4 8 9 7 5 6 4 8 9 7 2 3 1 8 9 7 2 3 1 5 6 4</p>	<p>VII</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 5 6 4 8 9 7 2 3 1 9 7 8 3 1 2 6 4 5 8 9 7 2 3 1 5 6 4 3 1 2 6 4 5 9 7 8 4 5 6 7 8 9 1 2 3 6 4 5 9 7 8 3 1 2 7 8 9 1 2 3 4 5 6 2 3 1 5 6 4 8 9 7</p>	<p>VIII</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 6 4 5 9 7 8 3 1 2 8 9 7 2 3 1 5 6 4 5 6 4 8 9 7 2 3 1 7 8 9 1 2 3 4 5 6 3 1 2 6 4 5 9 7 8 9 7 8 3 1 2 6 4 5 2 3 1 5 6 4 8 9 7 4 5 6 7 8 9 1 2 3</p>

一对正交的 10×10 拉丁方

<p>I</p> <p>0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 0 6 7 8 9 3 4 5 2 0 1 5 6 7 8 9 3 4 3 7 8 0 1 4 2 5 9 6 4 8 9 7 0 1 5 2 6 3 5 9 3 4 8 0 1 6 2 7 6 3 4 8 5 9 0 1 7 2 7 4 5 2 9 6 3 0 1 8 8 5 6 9 2 3 7 4 0 1 9 6 7 1 3 2 4 8 5 0</p>	<p>II</p> <p>0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 2 0 1 8 9 3 4 5 6 7 1 2 0 4 5 6 7 8 9 3 7 3 9 6 8 0 5 2 1 4 8 4 3 5 7 9 0 6 2 1 9 5 4 1 6 8 3 0 7 2 3 6 5 2 1 7 9 4 0 8 4 7 6 9 2 1 8 3 5 0 5 8 7 0 3 2 1 9 4 6 6 9 8 7 0 4 2 1 3 5</p>
---	--

五个正交的 12×12 拉丁方

<p>I</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 2 3 4 5 6 1 8 9 10 11 12 7 3 4 5 6 1 2 9 10 11 12 7 8 4 5 6 1 2 3 10 11 12 7 8 9 5 6 1 2 3 4 11 12 7 8 9 10 6 1 2 3 4 5 12 7 8 9 10 11 7 8 9 10 11 12 1 2 3 4 5 6 8 9 10 11 12 7 2 3 4 5 6 1 9 10 11 12 7 8 3 4 5 6 1 2 10 11 12 7 8 9 4 5 6 1 2 3 11 12 7 8 9 10 5 6 1 2 3 4 12 7 8 9 10 11 6 1 2 3 4 5</p>	<p>II</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 3 4 5 6 1 2 9 10 11 12 7 8 2 3 4 5 6 1 8 9 10 11 12 7 11 12 7 8 9 10 5 6 1 2 3 4 10 11 12 7 8 9 4 5 6 1 2 3 12 7 8 9 10 11 6 1 2 3 4 5 4 5 6 1 2 3 10 11 12 7 8 9 6 1 2 3 4 5 12 7 8 9 10 11 5 6 1 2 3 4 11 12 7 8 9 10 8 9 10 11 12 7 2 3 4 5 6 1 7 8 9 10 11 12 1 2 3 4 5 6 9 10 11 12 7 8 3 4 5 6 1 2</p>
<p>III</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 11 12 7 8 9 10 5 6 1 2 3 4 5 6 1 2 3 4 11 12 7 8 9 10 9 10 11 12 7 8 3 4 5 6 1 2 3 4 5 6 1 2 9 10 11 12 7 8 7 8 9 10 11 12 1 2 3 4 5 6 10 11 12 7 8 9 4 5 6 1 2 3 2 3 4 5 6 1 8 9 10 11 12 7 8 9 10 11 12 7 2 3 4 5 6 1 6 1 2 3 4 5 12 7 8 9 10 11 12 7 8 9 10 11 6 1 2 3 4 5 4 5 6 1 2 3 10 11 12 7 8 9</p>	<p>IV</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 6 1 2 3 4 5 12 7 8 9 10 11 10 11 12 7 8 9 4 5 6 1 2 3 3 4 5 6 1 2 9 10 11 12 7 8 11 12 7 8 9 10 5 6 1 2 3 4 8 9 10 11 12 7 2 3 4 5 6 1 9 10 11 12 7 8 3 4 5 6 1 2 5 6 1 2 3 4 11 12 7 8 9 10 12 7 8 9 10 11 6 1 2 3 4 5 2 3 4 5 6 1 8 9 10 11 12 7 4 5 6 1 2 3 10 11 12 7 8 9 7 8 9 10 11 12 1 2 3 4 5 6</p>
<p>V</p> <p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 7 8 9 10 11 12 1 2 3 4 5 6 6 1 2 3 4 5 12 7 8 9 10 11 8 9 10 11 12 7 2 3 4 5 6 1 12 7 8 9 10 11 6 1 2 3 4 5 5 6 1 2 3 4 11 12 7 8 9 10 3 4 5 6 1 2 9 10 11 12 7 8 9 10 11 12 7 8 3 4 5 6 1 2 11 12 7 8 9 10 5 6 1 2 3 4 4 5 6 1 2 3 10 11 12 7 8 9 2 3 4 5 6 1 8 9 10 11 12 7 10 11 12 7 8 9 4 5 6 1 2 3</p>	

30. 正交表

(1) $m=2$ 的情形

$L_4(2^3)$

列号 试验号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

[注] 任意二列间的交互作用出现于另一列。

$L_8(2^7)$

列号 试验号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

$L_8(2^7)$: 二列间的交互作用表

列号	1	2	3	4	5	6	7
(1)		3	2	5	4	7	6
(2)			1	6	7	4	5
(3)				7	6	5	4
(4)					1	2	3
(5)						3	2
(6)							1

$L_8(2^7)$: 主效应不与交互作用混杂的设计表

因素数	列号 实施	1	2	3	4	5	6	7	定义对比
3	1	A	B	A B	C	A C	B C		—
4	1/2	A	B	A B C D	C	A C B D	B C A D	D	1=ABCD

$L_{12}(2^{11})$

列号 试验号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2
4	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2
5	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1
6	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1
7	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1
8	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2
9	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1
10	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2
11	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2
12	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1

 $L_{16}(2^{15})$

列号 试验号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	1	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1

 $L_{16}(2^{15})$: 二列间的交互作用表

列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(1)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14	
(2)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13		
(3)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12			
(4)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11				
(5)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10					
(6)	1	14	15	12	13	10	11	8	9						
(7)	15	14	13	12	11	10	9	8							
(8)	1	2	3	4	5	6	7								
(9)	3	2	5	4	7	6									
(10)	1	6	7	4	5										
(11)	7	6	5	4											
(12)	1	2	3												
(13)	3	2													
(14)	1														

$L_{16}(2^{15})$: 主效应不与交互作用混杂的设计表

因素数	列号 实施	列号															定义对比	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
4	1	A	B	A E	C	A C	B C		D	A D	B D		C D					—
5	1/2	A	B	A B	C	A C	B C	D E	D	A D	B D	C E	C D	B E	A E	E		1=ABCDE
6	1/4	A	B	A B D E	C	A C D F	B C E F		D	A D B E C F	B D A E	E	C D A F	F		C E B F		1=ABDE =ACDF
7	1/8	A	B	A B D E F G	C	A C D F E G	B C E F D G		D	A D B E C F	B D A E C G	E	C D A F B G	F	G	C E B F A G		1=ABDE =ACDF =BCDG
8	1/16	A	B	A B D E F G H	C	A C D F E G H	B C E F D G A H	H	D	A D B E C F G H	B D A E C G F H	E	C D A F B G E H	F	G	C E B F A G D H		1=ABDE =ACDF =BCDG =ABCH

$L_{32}(2^{31})$

列号 试验号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
3	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	
4	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	
5	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	
6	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	
7	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	
8	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	
9	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	
10	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	
11	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	
12	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	
13	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	
14	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	
15	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
16	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
17	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
18	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
19	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
20	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1
21	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	2	1	2	1	1	2	2	1	2	2	1	2
22	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1
23	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
24	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
25	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2
26	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
27	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
28	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
29	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
30	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	1	2	2
31	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1
32	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2

$L_{32}(2^{31})$: 二列间的交互作用表

列号 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
(1)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14	17	16	19	18	21	20	23	22	25	24	27	26	29	28	31	30	
(2)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	18	19	16	17	22	23	20	21	26	27	24	25	30	31	28	29		
(3)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12	19	18	17	16	23	22	21	20	27	26	25	24	31	30	29	28			
(4)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11	20	21	22	23	16	17	18	19	28	29	30	31	24	25	26	27				
(5)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10	21	20	23	22	17	16	19	18	29	28	31	30	25	24	27	26					
(6)	1	14	15	12	13	10	11	8	9	22	23	20	21	18	19	16	17	30	31	28	29	26	27	24	25						
(7)	15	14	13	12	11	10	9	8	23	22	21	20	19	18	17	16	31	30	29	28	27	26	25	24							
(8)	1	2	3	4	5	6	7	24	25	26	27	28	29	30	31	16	17	18	19	20	21	22	23								
(9)	3	2	5	4	7	6	25	24	27	26	29	28	31	30	17	16	19	18	21	20	23	22									
(10)	1	6	7	4	5	26	27	24	25	30	31	28	29	18	19	16	17	22	23	20	21										
(11)	7	6	5	4	27	26	25	24	31	30	29	28	19	18	17	16	23	22	21	20											
(12)	1	2	3	28	29	30	31	24	25	26	27	20	21	22	23	16	17	18	19												
(13)	3	2	29	28	31	30	25	24	27	26	21	20	23	22	17	16	19	18													
(14)	1	30	31	28	29	26	27	24	25	22	23	20	21	18	19	16	17														
(15)	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16															
(16)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15																
(17)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14																	
(18)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13																		
(19)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12																			
(20)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11																				
(21)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10																					
(22)	1	14	15	12	13	10	11	8	9																						
(23)	15	14	13	12	11	10	9	8																							
(24)	1	2	3	4	5	6	7																								
(25)	3	2	5	4	7	6																									
(26)	1	6	7	4	5																										
(27)	7	6	5	4																											
(28)	1	2	3																												
(29)	3	2																													
(30)	1																														

$L_{32}(2^{31})$: 主效应不与交互作用混杂的设计表

因素数	列号	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31	定义对比
5	1	A B A C A B D A B C E A B C D B C C D D D E E E E	
6	1/2	A B A C A B D A B C E E A B C D D C B A F B C C D D D F E E E E F E F C F F F	1=ABCDEF
7	1/4	A B A C A B D A B C E E E A B C D D D C C A F G B F B C C D D D F G E E E F G E F G E F G F B F F G	1=ACDEF =BCDEG (=ABFG)
8	1/8	A B A C A B D A B C E E E A B D C D D D C C H A F G B F B C C D D D H D F G E E H E F G E F G F F F F F F G H	1=ACDEF =BCDEG =ABDEH (=ACGH)
9	1/16	A B A C A B I D A B C E E D E A B D C D D E D C C H A F G B F B C C I D D D H D F G I E E H E F G I E F G F F F F F F G C I	1=ACDEF =BCDEG =ABDEH =ABCI
10	1/32	A B A C A B E D A B C E E J E A B D C D D I D C C H A F G B F B C C I D D D H D F G I E E H E F G I E F G F F F F F F G H H J I I J I J J J J I I J I I J H H G G C H A G C H D I E J	1=ACDEF =BCDEG =ABDEH =ABCEI (=ADGI) =ABCDJ
16	1/2018	A B A C A B G D A B H C I J E E A B K C L M D D N O C P B A F B C C D D D D F E E E E E F E F F F F F F F F F F C B A B A G D F F F F F E F E E E E E E E E E G G G H H H G J I H G G H H I J I J I J I J I J I J D D H C G A C B A G C H D J J J J J J J J J J J H I I I I I H K K K K K K K K K K K K K K K K I H D G C B B C G A B I J J D H D H D H D H D H J J J J J J J J J I L L L L L L L L L L L L L L L L E E K F F F A G C B A J I H D M M M M M M M M M M K L L M L K J M M M M M M M M M M M M M M M M M L K E E K L M D H I N J A B C G G G G G G G G G G M M M N O F F K E M L H D J O I B A G C O O O O O O O O O O N O F N O P L M E K J J D H C G A B P P P P P P P P P P	1=ABCDEF =ABCG =ABDH =ACDI =BCDJ =ABEK =ACEL =BCEM =ADEN =BDEO =CDEP
15	1/1024	E K L M L K E E K L M D H I N J A B C G G G G G G G G G G	
14	1/512	L M M M N	
13	1/256	N O F F K E M L H D J O I B A G C O O O O O O O O O O	
12	1/128	O O N O	
11	1/64	F N O P L M E K J J D H C G A B P P P P P P P P P P	

依序消去字母 P, O, N, M, L, 使得

(2) $m=3$ 的情形

$L_9(3^4)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

[注] 任意二列间的交互作用出现于另外二列。

$L_{18}(3^7)$

[注]

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	1'
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	1
3	1	3	3	3	3	3	3	1
4	2	1	1	2	2	3	3	1
5	2	2	2	3	3	1	1	1
6	2	3	3	1	1	2	2	1
7	3	1	2	1	3	2	3	1
8	3	2	3	2	1	3	1	1
9	3	3	1	3	2	1	2	1
10	1	1	3	3	2	2	1	2
11	1	2	1	1	3	3	2	2
12	1	3	2	2	1	1	3	2
13	2	1	2	3	1	3	2	2
14	2	2	3	1	2	1	3	2
15	2	3	1	2	3	2	1	2
16	3	1	3	2	3	1	2	2
17	3	2	1	3	1	2	3	2
18	3	3	2	1	2	3	1	2

[注] 把两水平的列 1' 排进 $L_{18}(2^7)$, 使得混合型 $L_{18}(2^1 \times 3^7)$. 交互作用 $1' \times 1$ 可从两列的二元表求出. 在 $L_{18}(2^1 \times 3^7)$ 中把列 1' 和列 1 的水平组合 11, 12, 13, 21, 22, 23 分别换成 1, 2, 3, 4, 5, 6, 使得混合型 $L_{18}(6^1 \times 3^8)$.

$L_{27}(3^{13})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
7	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
10	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2
18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3
19	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2

$L_{27}(3^{13})$: 二列间的交互作用表

列号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(1) $\begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$		2	2	6	5	5	9	8	8	12	11	11	
(2) $\begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$	4		3	7	7	6	10	10	9	13	13	12	
(3) $\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$	3	1		8	9	10	5	6	7	5	6	7	
(4) $\begin{cases} 10 \\ 12 \end{cases}$	13	9	10		8	7	5	6	6	7	5		
(5) $\begin{cases} 1 \\ 7 \end{cases}$	11	12	12	13		11	12	13	11	10	8	9	
(6) $\begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$	12	13	11	12	13		11	12	9	10	8		
(7) $\begin{cases} 3 \\ 12 \end{cases}$	1	2	3	4	2	4		2	4	3			
(8) $\begin{cases} 1 \\ 10 \end{cases}$	6	11	13	12	8	10	9		8	10	9		
(9) $\begin{cases} 1 \\ 8 \end{cases}$	4	2	3	3	2	4	3	2		4	3		
(10) $\begin{cases} 3 \\ 6 \end{cases}$	13	12	11	10	9	8		9	8				
(11) $\begin{cases} 1 \\ 13 \end{cases}$	11	12	13	11	12	13	11	12	13				
(12) $\begin{cases} 1 \\ 11 \end{cases}$	12	13	11	12	13	11	12	13	11	12	13		

$L_{27}(3^{13})$: 主效应不与交互作用混杂的设计表

因素数	列号	列号											定义对比			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		12	13	
3	1	A	B	A B	A ² B	C	A C	A ² C	B C				B ² C		—	
4	1/3	A	B	A B C ² D	A ² B	C	A C B ² D	A ² C	B C A ² D	D	A D		B ² C	B D	C D	1=ABCD ²

$L_{36}(3^{13})$

[注]

试验号	列号	列号											列号				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1'	2'	3'
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3		1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4		1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	1	2	2
5		1	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1
6		1	3	3	3	3	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
7		1	1	1	2	3	1	2	3	3	1	2	2	3	2	1	2
8		1	2	2	3	1	2	3	1	1	2	3	3	1	2	1	2
9		1	3	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	2	1	2
10		1	1	1	3	2	1	3	2	3	2	1	3	2	2	2	1
11		1	2	2	1	3	2	1	3	1	3	2	1	3	2	2	1
12		1	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	2	1	2	2	1
13		2	1	2	3	1	3	2	1	3	3	2	1	2	1	1	1
14		2	2	3	1	2	1	3	2	1	1	3	2	3	1	1	1
15		2	3	1	2	3	2	1	3	2	2	1	3	1	1	1	1
16		2	1	2	3	2	1	1	3	2	3	3	2	1	1	2	2
17		2	2	3	1	3	2	2	1	3	1	1	3	2	1	2	2
18		2	3	1	2	1	3	3	2	1	2	2	1	3	1	2	2
19		2	1	2	1	3	3	3	1	2	2	1	2	3	2	1	2
20		2	2	3	2	1	1	1	2	3	3	2	3	1	2	1	2
21		2	3	1	3	2	2	2	3	1	1	3	1	2	2	1	2
22		2	1	2	2	3	3	1	2	1	1	3	3	2	2	2	1
23		2	2	3	3	1	1	2	3	2	2	1	1	3	2	2	1
24		2	3	1	1	2	2	3	1	3	3	2	2	1	2	2	1
25		3	1	3	2	1	2	3	3	1	3	1	2	2	1	1	1
26		3	2	1	3	2	3	1	1	2	1	2	3	3	1	1	1
27		3	3	2	1	3	1	2	2	3	2	3	1	1	1	1	1
28		3	1	3	2	2	2	1	1	3	2	3	1	3	1	2	2
29		3	2	1	3	3	3	2	2	1	3	1	2	1	1	2	2
30		3	3	2	1	1	1	3	3	2	1	2	3	2	1	2	2
31		3	1	3	3	3	2	3	2	2	1	2	1	1	2	1	2
32		3	2	1	1	1	3	1	3	3	2	3	2	2	2	1	2
33		3	3	2	2	2	1	2	1	1	3	1	3	3	2	1	2
34		3	1	3	1	2	3	2	3	1	2	2	3	1	2	2	1
35		3	2	1	2	3	1	3	1	2	3	3	1	2	2	2	1
36		3	3	2	3	1	2	1	2	3	1	1	2	3	2	2	1

[注] 把两水平的列1', 2'和3'排进 $L_{36}(3^{13})$, 使得混合型 $L_{36}(2^3 \times 3^{13})$. 这时交互作用 $1' \times 2'$ 出现于 $3'$, 并且交互作用 $1' \times 1, 2' \times 1$ 和 $3' \times 1$ 可分别从各自的二元表求出.

$L_{81}(3^{40})$: 二列间的交互作用表

列号	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
(1)	15	14	14	18	17	17	21	20	20	24	23	23	27	26	26	30	29	29	33	32	32	36	35	35	39	38	38
(2)	17	18	19	14	15	16	14	15	16	26	27	28	23	24	25	23	24	25	35	36	37	32	33	34	32	33	34
(3)	18	19	17	16	14	15	15	16	14	27	28	26	25	23	24	24	25	23	36	37	35	34	32	33	33	34	32
(4)	19	17	18	15	16	14	16	14	15	28	26	27	24	25	23	25	23	24	37	35	36	33	34	32	34	32	33
(5)	23	24	25	26	27	28	29	30	31	14	15	16	17	18	19	20	21	22	14	15	16	17	18	19	20	21	22
(6)	24	25	23	27	28	26	30	31	29	16	14	15	19	17	18	22	20	21	15	16	14	18	19	17	21	22	20
(7)	25	23	24	28	26	27	31	20	30	15	16	14	18	19	17	21	22	20	16	14	15	19	17	18	22	20	21
(8)	26	27	28	29	30	31	23	24	25	20	21	22	14	15	16	17	18	19	17	18	19	20	21	22	14	15	16
(9)	27	28	26	30	31	29	24	25	23	22	20	21	16	14	15	19	17	18	18	19	17	21	22	20	15	16	14
(10)	28	26	27	31	29	30	25	23	24	21	22	20	15	16	14	18	19	17	19	17	18	22	20	21	16	14	15
(11)	29	30	31	23	24	25	26	27	28	17	18	19	20	21	22	14	15	16	20	21	22	14	15	16	17	18	19
(12)	30	31	29	24	25	23	27	28	26	19	17	18	22	20	21	16	14	15	21	22	20	15	16	14	18	19	17
(13)	31	29	30	25	23	24	28	26	27	18	19	17	21	22	20	15	16	14	22	20	21	16	14	15	19	17	18
(14)	1	1	2	3	4	2	4	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	5	7	6	11	13	12	8	10	9	
(15)	1	4	2	3	3	2	4	7	5	6	10	8	9	13	11	12	6	5	7	12	11	13	9	8	10	7	
(16)	3	4	2	4	3	2	6	7	5	9	10	8	12	13	11	7	6	5	13	12	11	10	9	8	7	6	
(17)	1	1	2	3	4	11	12	13	5	6	7	8	9	10	8	10	9	5	7	6	11	13	12	8	10	9	
(18)	1	4	2	3	13	11	12	7	5	6	10	8	9	9	8	10	6	5	7	12	11	13	12	8	10	9	
(19)	3	4	2	12	13	11	6	7	5	9	10	8	10	9	8	7	6	5	13	12	11	10	9	8	7	6	
(20)	1	1	8	9	10	11	12	13	5	6	7	11	13	12	8	10	9	5	7	6	11	13	12	8	10	9	
(21)	1	10	8	9	13	11	12	7	5	6	12	11	13	9	8	10	6	5	7	6	11	13	12	8	10	9	
(22)	9	10	8	12	13	11	6	7	5	13	12	11	10	9	8	7	6	5	13	12	11	10	9	8	7	6	
(23)	1	1	2	3	4	2	4	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	5	7	6	11	13	12	8	10	9	
(24)	1	4	2	3	3	2	4	7	5	6	10	8	9	13	11	12	7	6	5	13	12	11	10	9	8	7	
(25)	3	4	2	4	3	2	6	7	5	9	10	8	12	13	11	7	6	5	13	12	11	10	9	8	7	6	
(26)	1	1	2	3	4	11	12	13	5	6	7	8	9	10	8	10	9	5	7	6	11	13	12	8	10	9	
(27)	1	4	2	3	13	11	12	7	5	6	10	8	9	13	11	12	7	6	5	13	12	11	10	9	8	7	
(28)	3	4	2	12	13	11	6	7	5	9	10	8	10	9	8	7	6	5	13	12	11	10	9	8	7	6	
(29)	1	1	8	9	10	11	12	13	5	6	7	8	9	10	11	12	13	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
(30)	1	10	8	9	13	11	12	7	5	6	12	11	13	9	8	10	6	5	7	6	11	13	12	8	10	9	
(31)	9	10	8	12	13	11	6	7	5	13	12	11	10	9	8	7	6	5	13	12	11	10	9	8	7	6	
(32)	1	1	2	3	4	2	4	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	5	7	6	11	13	12	8	10	9	
(33)	1	4	2	3	3	2	4	7	5	6	10	8	9	13	11	12	7	6	5	13	12	11	10	9	8	7	
(34)	3	4	2	4	3	2	6	7	5	9	10	8	12	13	11	7	6	5	13	12	11	10	9	8	7	6	
(35)	1	1	2	3	4	11	12	13	5	6	7	8	9	10	8	10	9	5	7	6	11	13	12	8	10	9	
(36)	1	4	2	3	3	2	4	7	5	6	10	8	9	13	11	12	7	6	5	13	12	11	10	9	8	7	
(37)	3	4	2	12	13	11	6	7	5	9	10	8	10	9	8	7	6	5	13	12	11	10	9	8	7	6	
(38)	1	1	8	9	10	11	12	13	5	6	7	8	9	10	11	12	13	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
(39)	1	1	2	3	4	11	12	13	5	6	7	8	9	10	11	12	13	5	6	7	8	9	10	11	12	13	

【注】 列1—13之间的交互作用, 见 $L_{27}(3^{13})$ 的表.

$L_{81}(3^{40})$: 主效应不与交互作用混杂的设计表

因素数	列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	定义对比
4	1	A	B	A	A ²	C	A	A ²	B	B ²	C	D	A	A ²	B	B ²	C	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	—	
5	1/3	A	B	A	A ²	C	A	A ²	B	B ²	C	D	A	A ²	B	B ²	C	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	1=ABCD ² E	
6	1/9	A	B	A	A ²	C	A	A ²	B	B ²	C	D	A	A ²	B	B ²	C	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	1=ABCD ² E =ABC ² DF ² (=ABE ² F) (=C ² DEF)	
7	1/27	A	B	A	A ²	C	A	A ²	B	B ²	C	D	A	A ²	B	B ²	C	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	1=ABCD ² E =ABC ² DF ² =AB ² CDG ² =ACE ² G =B ² DEG =ADFG (=B ² CF ² G)	
8	1/81	A	B	A	A ²	C	A	A ²	B	B ²	C	D	A	A ²	B	B ²	C	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	1=ABC ² DEH ² =BCE ² H=A ² DEH (=BDFH=AC ² FH ²) (=CDGH=A ³ BG ² H)	
9	1/243	A	B	A	A ²	C	A	A ²	B	B ²	C	D	A	A ²	B	B ²	C	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	1=ABCD ² E =ABC ² DF ² =BCD ² G ² =AC ² D ² H =AB ² D ² I	
10	1/729	A	B	A	A ²	C	A	A ²	B	B ²	C	D	A	A ²	B	B ²	C	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	C ²	D	—ABCJ ²	

(3) $m=24$ 的情形

$L_{16}(4^5)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4
5	2	1	2	3	4
6	2	2	1	4	3
7	2	3	4	1	2
8	2	4	3	2	1
9	3	1	3	4	2
10	3	2	4	3	1
11	3	3	1	2	4
12	3	4	2	1	3
13	4	1	4	2	3
14	4	2	3	1	4
15	4	3	2	4	1
16	4	4	1	3	2

[注] 任意二列间的交互作用出现于其他三列。

$L_{32}(4^9)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1'
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1
3	1	3	3	3	3	3	3	3	3	1
4	1	4	4	4	4	4	4	4	4	1
5	2	1	1	2	2	3	3	4	4	1
6	2	2	2	1	1	4	4	3	3	1
7	2	3	3	4	4	1	1	2	2	1
8	2	4	4	3	3	2	2	1	1	1
9	3	1	2	3	4	1	2	3	4	1
10	3	2	1	4	3	2	1	4	3	1
11	3	3	4	1	2	3	4	1	2	1
12	3	4	3	2	1	4	3	2	1	1
13	4	1	2	4	3	3	4	2	1	1
14	4	2	1	3	4	4	3	1	2	1
15	4	3	4	2	1	1	2	4	3	1
16	4	4	3	1	2	2	1	3	4	1
17	1	1	4	1	4	2	3	2	3	2
18	1	2	3	2	3	1	4	1	4	2
19	1	3	2	3	2	4	1	4	1	2
20	1	4	1	4	1	3	2	3	2	2
21	2	1	4	2	3	4	1	3	2	2
22	2	2	3	1	4	3	2	4	1	2
23	2	3	2	4	1	2	3	1	4	2
24	2	4	1	3	2	1	4	2	3	2
25	3	1	3	3	1	2	4	4	2	2
26	3	2	4	4	2	1	3	3	1	2
27	3	3	1	1	3	4	2	2	4	2
28	3	4	2	2	4	3	1	1	3	2
29	4	1	3	4	2	4	2	1	3	2
30	4	2	4	3	1	3	1	2	4	2
31	4	3	1	2	4	2	4	3	1	2
32	4	4	2	1	3	1	3	4	2	2

[注] 把两水平的列 1' 排进 $L_{32}(4^9)$, 便得混合型 $L_{32}(2^1 \times 4^9)$. 这时交互作用 $1' \times 1$ 可从二元表求出. 把列 1' 和列 1 的水平组合 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24 分别换成 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 便得混合型 $L_{32}(8^1 \times 4^8)$.

$L_{64}(4^{21})$: 主效应不与交互作用混杂的设计表

因素数	列号 实施	列号																				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3	1	A	B	A	A	A	C	A	A	A	B			B				B				B
			B ₁	A ₂	A ₃	A ₃	C ₁	A ₂	A ₃	A ₃	C ₁			B ₁				C ₂				C ₃
4	1/4	A	B	A	A	A	C	A	A	A	B	C	B	B	B	C	B	B	A	A	A	D
			B ₁	A ₂	A ₃	A ₃	C ₁	A ₂	A ₃	A ₃	C ₁	D ₂	D ₂	C ₂	D ₃	D ₃	D ₃	C ₃	D ₂	D ₃	D ₃	D
																						A
																						D ₁
5	1/16	A	B	A	A	A	C	A	A	A	B	C	B	B	B	E	C	B	B	A	A	D
			B ₁	A ₂	A ₃	A ₃	C ₁	A ₂	A ₃	A ₃	C ₁	D ₂	D ₂	C ₂	D ₃	D ₃	D ₃	C ₃	D ₂	D ₃	D ₃	D
																						A
																						D ₁
																						A
																						D ₁
6	1/64	A	B	A	A	A	C	A	A	A	B	C	F	B	B	E	C	B	B	A	A	D
			B ₁	A ₂	A ₃	A ₃	C ₁	A ₂	A ₃	A ₃	C ₁	D ₂	D ₂	C ₂	D ₃	D ₃	D ₃	C ₃	D ₂	D ₃	D ₃	D
																						A
																						D ₁
																						A
																						D ₁
																						A
																						D ₁
																						A
																						D ₁
																						A
																						D ₁
																						A
																						D ₁
																						A
																						D ₁
																						A
																						D ₁

[注] 足码只表示交互作用的三个分量,与三水平的足码的意义不同,因为四水平的定义对比复杂,不便于列出。

(4) $m=5$ 的情形

$L_{25}(5^6)$

试验号	列号					
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4	4
5	1	5	5	5	5	5
6	2	1	2	3	4	5
7	2	2	3	4	5	1
8	2	3	4	5	1	2
9	2	4	5	1	2	3
10	2	5	1	2	3	4
11	3	1	3	5	2	4
12	3	2	4	1	3	5
13	3	3	5	2	4	1
14	3	4	1	3	5	2
15	3	5	2	4	1	3
16	4	1	4	2	5	3
17	4	2	5	3	1	4
18	4	3	1	4	2	5
19	4	4	2	5	3	1
20	4	5	3	1	4	2
21	5	1	5	4	3	2
22	5	2	1	5	4	3
23	5	3	2	1	5	4
24	5	4	3	2	1	5
25	5	5	4	3	2	1

[注] 任意二列间的交互作用出现于其他四列。

$L_{50}(5^{11})$

试验号	列号											1'	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	2	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
7	2	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
8	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
9	2	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
10	2	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
11	3	1	3	5	2	4	4	1	3	5	2	1	3
12	3	2	4	1	3	5	5	2	4	1	3	2	4
13	3	3	5	2	4	1	1	3	5	2	4	1	3
14	3	4	1	3	5	2	2	4	1	3	5	2	4
15	3	5	2	4	1	3	3	5	2	4	1	3	5
16	4	1	4	2	5	3	5	3	1	4	2	1	4
17	4	2	5	3	1	4	1	4	2	5	3	1	4
18	4	3	1	4	2	5	2	5	3	1	4	2	5
19	4	4	2	5	3	1	3	1	4	2	5	3	1
20	4	5	3	1	4	2	4	2	5	3	1	4	2
21	5	1	5	4	3	2	4	3	2	1	5	1	5
22	5	2	1	5	4	3	5	4	3	2	1	5	4
23	5	3	2	1	5	4	1	5	4	3	2	1	5
24	5	4	3	2	1	5	2	1	5	4	3	2	1
25	5	5	4	3	2	1	3	2	1	5	4	3	2
26	1	1	1	4	5	4	3	2	5	2	3	2	5
27	1	2	2	5	1	5	4	3	1	3	4	2	5
28	1	3	3	1	2	1	5	4	2	4	5	1	3
29	1	4	4	2	3	2	1	5	3	5	1	3	4
30	1	5	5	3	4	3	2	1	4	1	2	3	5
31	2	1	2	1	3	3	2	4	5	5	4	2	3
32	2	2	3	2	4	4	3	5	1	1	5	3	4
33	2	3	4	3	5	5	4	1	2	2	1	3	5
34	2	4	5	4	1	1	5	2	3	3	2	4	1
35	2	5	1	5	2	2	1	3	4	4	3	5	1
36	3	1	3	3	1	2	5	5	4	2	4	2	3
37	3	2	4	4	2	3	1	1	5	3	5	1	4
38	3	3	5	5	3	4	2	2	1	4	1	3	5
39	3	4	1	1	4	5	3	3	2	5	2	4	1
40	3	5	2	2	5	1	4	4	3	1	3	5	2
41	4	1	4	5	4	1	2	5	2	3	3	2	5
42	4	2	5	1	5	2	3	1	3	4	4	1	3
43	4	3	1	2	1	3	4	2	4	5	5	2	3
44	4	4	2	3	2	4	5	3	5	1	1	3	4
45	4	5	3	4	3	5	1	4	1	2	2	4	1
46	5	1	5	2	2	5	3	4	4	3	1	2	5
47	5	2	1	3	3	1	4	5	5	4	2	3	1
48	5	3	2	4	4	2	5	1	1	5	3	4	2
49	5	4	3	5	5	3	1	2	2	1	4	5	3
50	5	5	4	1	1	4	2	3	3	2	5	4	1

[注] 把两水平的列 1' 排进 $L_{50}(5^{11})$, 使得混合型 $L_{50}(2^1 \times 5^{11})$. 这时交互作用 $1' \times 1$ 可从二元表求出. 把列 1' 和列 1 的水平组合 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25 分别换成 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 使得混合型 $L_{50}(10^1 \times 5^{10})$.

31. 平衡不完全区组设计的参数表

($r \leq 10$)

设计	v	k	r	b	l	E	[注]
1	4	2	3	6	1	.67	(*)
2		3	3	4	2	.89	(**)
3	5	2	4	10	1	.62	(*)
4		3	6	10	3	.83	(*)
5		4	4	5	3	.91	(**)
6	6	2	5	15	1	.60	(*)
7		3	5	10	2	.80	
8		3	10	20	4	.80	(*)
9		4	10	15	6	.90	(*)
10		5	5	6	4	.96	(**)
11	7	2	6	21	1	.58	(*)
12		3	3	7	1	.78	
13		4	4	7	2	.88	
14		6	6	7	5	.97	(**)
15	8	2	7	28	1	.57	(*)
16		4	7	14	3	.86	
17		7	7	8	6	.98	(**)
18	9	2	8	36	1	.56	(*)
19		3	4	12	1	.75	
20		4	8	18	3	.84	
21		5	10	18	5	.90	
22		6	8	12	5	.94	
23		8	8	9	7	.98	(**)
24	10	2	9	45	1	.56	(*)
25		3	9	30	2	.74	
26		4	6	15	2	.83	
27		5	9	18	4	.89	
28		6	9	15	5	.93	
29		9	9	10	3	.99	(**)
30	11	2	10	55	1	.55	(*)
31		5	5	11	2	.88	
32		6	6	11	3	.92	
33		10	10	11	9	.99	(**)
34	13	3	6	26	1	.72	
35		4	4	13	1	.81	
36		9	9	13	6	.96	
37	15	3	7	35	1	.71	
38		7	7	15	3	.92	
39		8	8	15	4	.94	
40	16	4	5	20	1	.80	
41		6	6	16	2	.89	
42		6	9	24	3	.89	
43		10	10	16	6	.96	
44	19	3	9	57	1	.70	
45		9	9	19	4	.94	
46		10	10	19	5	.95	
47	21	3	10	70	1	.70	
48		5	5	21	1	.84	
49		7	10	30	3	.90	
50	25	4	8	50	1	.78	
51		5	6	30	1	.83	
52		9	9	25	3	.93	
53	28	4	9	63	1	.78	
54		7	9	36	2	.89	
55	31	6	6	31	1	.86	
56		10	10	31	3	.93	
57	37	9	9	37	2	.91	
58	41	5	10	32	1	.82	
59	49	7	8	56	1	.87	
60	57	8	8	57	1	.89	
61	64	8	9	72	1	.89	
62	73	9	9	73	1	.90	
63	91	9	10	90	1	.90	
64		10	10	91	1	.91	

[注] 标以(*)号的这些设计可由从v个处理同时取k个的所有可能组合构成。尽管如此,由于这些设计的区组均可分成若干组,使得每个处理在每组出现一次或多次(每出现一次叫做一重复),甚至形成推广的尧敦方,因此也一一列出其具体方案。

标以(**)号的这些设计也可从所有可能组合构成,而且当从 $v \times v$ 拉丁方中去掉最后一列时,得到它的尧敦方形状,因此这里就一概不给出其具体方案。

32. 平衡不完全区组设计表

(阿拉伯数字表示处理, 行表示区组, 罗马数字表示重复)

设计 1 $v=4, k=2, r=3, b=6, \lambda=1$

I		II		III	
1	2	1	3	1	4
3	4	2	4	2	3

设计 3 $v=5, k=2, r=4, b=10, \lambda=1$

I		II		III		IV	
1	2			1	3		
2	3			2	4		
3	4			3	5		
4	5			4	1		
5	1			5	2		

设计 4 $v=5, k=3, r=6, b=10, \lambda=3$

I			II			III			IV			V			VI		
1	2	3							1	2	4						
2	3	4							2	3	5						
3	4	5							3	4	1						
4	5	1							4	5	2						
5	1	2							5	1	3						

设计 6 $v=6, k=2, r=5, b=15, \lambda=1$

I		II		III		IV		V	
1	2	1	3	1	4	1	5	1	6
3	4	2	5	2	6	2	4	2	3
5	6	4	6	3	5	3	6	4	5

设计 7 $v=6, k=3, r=5, b=10, \lambda=2$

1	2	5	2	3	4
1	2	6	2	3	5
1	3	4	2	4	6
1	3	6	3	5	6
1	4	5	4	5	6

设计 8 $v=6, k=3, r=10, b=20, \lambda=4$

I			II			III			IV			V		
1	2	3	1	2	4	1	2	5	1	2	6	1	3	4
4	5	6	3	5	6	3	4	6	3	4	5	2	5	6

VI		VII		VIII		IX		X						
1	3	5	1	3	6	1	4	5	1	4	6	1	5	6
2	4	6	2	4	5	2	3	6	2	3	5	2	3	4

设计 9 $v=6, k=4, r=10, b=15, \lambda=6$

I, II		III, IV		V, VI		VII, VIII		IX, X							
1	2	3	4	1	2	3	5	1	2	4	5	1	2	5	6
1	4	5	6	1	2	4	6	1	3	4	5	1	3	5	6
2	3	5	6	3	4	5	6	2	3	4	6	2	3	4	5

设计 11 $v=7, k=2, r=6, b=21, \lambda=1$

I		II		III		IV		V		VI	
1	2			1	3			1	4		
2	3			2	4			2	5		
3	4			3	5			3	6		
4	5			4	6			4	7		
5	6			5	7			5	1		
6	7			6	1			6	2		
7	1			7	2			7	3		

设计 12 $v=7, k=3, r=3, b=7, \lambda=1$

1	2	4
2	3	5
3	4	6
4	5	7
5	6	1
6	7	2
7	1	3

设计 13 $v=7, k=4, r=4, b=7, \lambda=2$

1	2	3	6
2	3	4	7
3	4	5	1
4	5	6	2
5	6	7	3
6	7	1	4
7	1	2	5

设计 15 $v=8, k=2, r=7, b=28, \lambda=1$

I		II		III		IV	
1	2	1	3	1	4	1	5
3	4	2	8	2	7	2	3
5	6	4	5	3	6	4	7
7	8	6	7	5	8	6	8

V		VI		VII	
1	6	1	7	1	8
2	4	2	6	2	5
3	8	3	5	3	7
5	7	4	8	4	6

设计 16 $v=8, k=4, r=7, b=14, \lambda=3$

I				II				III				IV			
1	2	3	4	1	2	5	6	1	2	7	8	1	3	5	7
5	6	7	8	3	4	7	8	3	4	5	6	2	4	6	8

V				VI				VII			
1	3	6	8	1	4	5	8	1	4	6	7
2	4	5	7	2	3	6	7	2	3	5	8

设计 18 $v=9, k=2, r=8, b=36, \lambda=1$

I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII	
1	2			1	3			1	4			1	5		
2	3			2	4			2	5			2	6		
3	4			3	5			3	6			3	7		
4	5			4	6			4	7			4	8		
5	6			5	7			5	8			5	9		
6	7			6	8			6	9			6	1		
7	8			7	9			7	1			7	2		
8	9			8	1			8	2			8	3		
9	1			9	2			9	3			9	4		

设计19 $v=9, k=3, r=4, b=12, \lambda=1$

I	II	III	IV
1 2 3	1 4 7	1 5 9	1 6 8
4 5 6	2 5 8	2 6 7	2 4 9
7 8 9	3 6 9	3 4 8	3 5 7

设计20 $v=9, k=4, r=8, b=18, \lambda=3$

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1 2 3 5				1 4 5 8			
2 3 4 6				2 5 6 9			
3 4 5 7				3 6 7 1			
4 5 6 8				4 7 8 2			
5 6 7 9				5 8 9 3			
6 7 8 1				6 9 1 4			
7 8 9 2				7 1 2 5			
8 9 1 3				8 2 3 6			
9 1 2 4				9 3 4 7			

设计21 $v=9, k=5, r=10, b=18, \lambda=5$

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1 2 3 4 8					1 2 4 6 7				
2 3 4 5 9					2 3 5 7 8				
3 4 5 6 1					3 4 6 8 9				
4 5 6 7 2					4 5 7 9 1				
5 6 7 8 3					5 6 8 1 2				
6 7 8 9 4					6 7 9 2 3				
7 8 9 1 5					7 8 1 3 4				
8 9 1 2 6					8 9 2 4 5				
9 1 2 3 7					9 1 3 5 6				

设计22 $v=9, k=6, r=8, b=12, \lambda=5$

I, II	III, IV
1 2 3 4 5 6	1 2 4 5 7 8
1 2 3 7 8 9	1 3 4 6 7 9
4 5 6 7 8 9	2 3 5 6 8 9
V, VI	VII, VIII
1 2 4 6 8 9	1 2 5 6 7 9
1 3 5 6 7 8	1 3 4 5 8 9
2 3 4 5 7 9	2 3 4 6 7 8

设计24 $v=10, k=2, r=9, b=45, \lambda=1$

I	II	III	IV	V
1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
3 4	2 7	2 10	2 8	2 9
5 6	4 8	3 7	3 10	3 8
7 8	5 9	5 8	4 9	4 10
9 10	6 10	6 9	6 7	5 7
VI	VII	VIII	IX	
1 7	1 8	1 9	1 10	
2 6	2 3	2 4	2 5	
3 9	4 6	3 5	3 6	
4 5	5 10	6 8	4 7	
8 10	7 9	7 10	8 9	

设计25 $v=10, k=3, r=9, b=30, \lambda=2$

I, II, III	IV, V, VI	VII, VIII, IX
1 2 3	1 2 4	1 3 5
1 4 6	1 5 7	1 6 8
1 7 9	1 8 10	1 9 10
2 5 8	2 3 6	2 4 10
2 8 10	2 5 9	2 6 7
3 4 7	3 4 8	2 7 9
3 9 10	3 7 10	3 5 6
4 6 9	4 5 9	3 8 9
5 6 10	6 7 10	4 5 10
5 7 8	6 8 9	4 7 8

设计26 $v=10, k=4, r=6, b=15, \lambda=2$

1 2 3 4	1 6 8 10	3 4 5 8
1 2 5 6	2 3 6 9	3 5 9 10
1 3 7 8	2 4 7 10	3 6 7 10
1 4 9 10	2 5 8 10	4 5 6 7
1 5 7 9	2 7 8 9	4 6 8 9

设计27 $v=10, k=5, r=9, b=18, \lambda=4$

1 2 3 4 5	1 4 5 6 10	2 5 6 8 10
1 2 3 6 7	1 4 8 9 10	2 6 7 9 10
1 2 4 6 9	1 5 7 9 10	3 4 5 7 9
1 2 5 7 8	2 3 4 8 10	3 4 6 7 10
1 3 6 8 9	2 3 5 9 10	3 5 6 8 9
1 3 7 8 10	2 4 7 8 9	4 5 6 7 8

设计28 $v=10, k=6, r=9, b=15, \lambda=5$

1 2 3 5 7 10	1 3 4 5 6 10	2 3 4 6 8 10
1 2 3 8 9 10	1 3 4 6 7 9	2 3 5 6 7 8
1 2 4 5 8 9	1 3 5 6 8 9	2 4 5 6 9 10
1 2 4 6 7 8	1 4 5 7 8 10	3 4 7 8 9 10
1 2 6 7 9 10	2 3 4 5 7 9	5 6 7 8 9 10

设计30 $v=11, k=2, r=10, b=55, \lambda=1$

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8	1 9	1 10	1 11
2 3	2 4	2 5	2 6	2 7	2 8	2 9	2 10	2 11	
3 4	3 5	3 6	3 7	3 8	3 9	3 10	3 11		
4 5	4 6	4 7	4 8	4 9	4 10	4 11			
5 6	5 7	5 8	5 9	5 10	5 11				
6 7	6 8	6 9	6 10	6 11					
7 8	7 9	7 10	7 11						
8 9	8 10	8 11							
9 10	9 11	9 1	9 2	9 3					
10 11	10 1	10 2	10 3	10 4					
11 1	11 2	11 3	11 4	11 5					

设计31 $v=11, k=5, r=5, b=11, \lambda=2$

1 2 3 5 8
2 3 4 6 9
3 4 5 7 10
4 5 6 8 11
5 6 7 9 1
6 7 8 10 2
7 8 9 11 3
8 9 10 1 4
9 10 11 2 5
10 11 1 3 6
11 1 2 4 7

设计32 $v=11, k=6, r=6, b=11, \lambda=3$

1	2	3	7	9	10
2	3	4	8	10	11
3	4	5	9	11	1
4	5	6	10	1	2
5	6	7	11	2	3
6	7	8	1	3	4
7	8	9	2	4	5
8	9	10	3	5	6
9	10	11	4	6	7
10	11	1	5	7	8
11	1	2	6	8	9

设计38 $v=15, k=7, r=7, b=15, \lambda=3$

1	2	3	5	6	9	11
2	3	4	6	7	10	12
3	4	5	7	8	11	13
4	5	6	8	9	12	14
5	6	7	9	10	13	15
6	7	8	10	11	14	1
7	8	9	11	12	15	2
8	9	10	12	13	1	3
9	10	11	13	14	2	4
10	11	12	14	15	3	5
11	12	13	15	1	4	6
12	13	14	1	2	5	7
13	14	15	2	3	6	8
14	15	1	3	4	7	9
15	1	2	4	5	8	10

设计34 $v=13, k=3, r=6, b=26, \lambda=1$

I	II	III	IV	V	VI
1	2	11	1	3	9
2	3	12	2	4	10
3	4	13	3	5	11
4	5	1	4	6	12
5	6	2	5	7	13
6	7	3	6	8	1
7	8	4	7	9	2
8	9	5	8	10	3
9	10	6	9	11	4
10	11	7	10	12	5
11	12	3	11	13	6
12	13	9	12	1	7
13	1	10	13	2	8

设计39 $v=15, k=8, r=8, b=15, \lambda=4$

1	2	3	4	8	11	12	14
2	3	4	5	9	12	13	15
3	4	5	6	10	13	14	1
4	5	6	7	11	14	15	2
5	6	7	8	12	15	1	3
6	7	8	9	13	1	2	4
7	8	9	10	14	2	3	5
8	9	10	11	15	3	4	6
9	10	11	12	1	4	5	7
10	11	12	13	2	5	6	8
11	12	13	14	3	6	7	9
12	13	14	15	4	7	8	10
13	14	15	1	5	8	9	11
14	15	1	2	6	9	10	12
15	1	2	3	7	10	11	13

设计35 $v=13, k=4, r=4, b=13, \lambda=1$

1	2	4	10
2	3	5	11
3	4	6	12
4	5	7	13
5	6	8	1
6	7	9	2
7	8	10	3
8	9	11	4
9	10	12	5
10	11	13	6
11	12	1	7
12	13	2	8
13	1	3	9

设计40 $v=16, k=4, r=5, b=20, \lambda=1$

I	II	III									
1	2	3	4	15	9	13	1	6	11	16	
5	6	7	8	2	6	10	14	2	5	12	15
9	10	11	12	3	7	11	15	3	8	9	14
13	14	15	16	4	8	12	16	4	7	10	13
IV	V										
1	7	12	14	1	8	10	15				
2	8	11	13	2	7	9	16				
3	5	10	16	3	6	12	13				
4	6	9	15	4	5	11	14				

设计36 $v=13, k=9, r=9, b=13, \lambda=6$

1	2	3	4	5	7	8	9	12
2	3	4	5	6	3	9	10	13
3	4	5	6	7	9	10	11	1
4	5	6	7	8	10	11	12	2
5	6	7	8	9	11	12	13	3
6	7	8	9	10	12	13	1	4
7	8	9	10	11	13	1	2	5
8	9	10	11	12	1	2	3	6
9	10	11	12	13	2	3	4	7
10	11	12	13	1	3	4	5	8
11	12	13	1	2	4	5	6	9
12	13	1	2	3	5	6	7	10
13	1	2	3	4	6	7	8	11

设计41 $v=16, k=6, r=6, b=16, \lambda=2$

1	2	3	4	5	6
2	7	8	9	10	1
3	1	13	7	11	12
4	8	1	11	14	15
5	12	14	1	16	9
6	10	15	13	1	16
7	14	2	16	15	3
8	16	12	2	4	13
9	15	11	5	13	2
10	11	6	12	2	14
11	4	16	3	9	10
12	3	10	15	8	5
13	6	9	14	3	8
14	13	5	10	7	4
15	9	4	6	12	7
16	5	7	8	6	11

设计37 $v=15, k=3, r=7, b=35, \lambda=1$

I	II	III	IV								
1	2	3	1	4	5	1	6	7	1	8	9
4	8	12	2	8	10	2	9	11	2	13	15
5	10	15	3	13	14	3	12	15	3	4	7
6	11	13	6	9	15	4	10	14	5	11	14
7	9	14	7	11	12	5	8	13	6	10	12
V	VI	VII									
1	10	11	1	12	13	1	14	15			
2	12	14	2	5	7	2	4	6			
3	5	6	3	9	10	3	8	11			
4	9	13	4	11	15	5	9	12			
7	8	15	6	8	14	7	10	13			

设计42 $v=16, k=6, r=9, b=24, \lambda=3$

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX									
1	2	5	6	11	12	1	3	5	7	10	12	1	4	5	8	10	11
1	2	7	8	13	14	1	3	6	8	13	15	1	4	6	7	13	16
1	2	9	10	15	16	1	3	9	11	14	15	1	4	9	12	14	15
3	4	5	6	15	16	2	4	5	7	14	16	2	3	5	8	14	15
3	4	7	8	9	10	2	4	6	8	9	11	2	3	6	7	9	12
3	4	11	12	13	14	2	4	10	12	13	15	2	3	10	11	13	16
5	6	9	10	13	14	5	7	9	11	13	15	5	8	9	12	13	16
7	8	11	12	15	16	6	8	10	12	14	16	6	7	10	11	14	15

设计43 $v=16, k=10, r=10, b=16, \lambda=6$

1 4 5 6 8 9 10 11 12 13
 2 7 10 9 12 13 6 3 16 5
 3 13 11 12 14 15 4 5 6 16
 4 8 9 7 11 12 5 14 2 3
 5 6 3 11 7 10 1 15 9 14
 6 3 7 15 13 11 8 2 10 4
 7 1 4 3 9 8 13 16 5 15
 8 10 12 13 15 16 7 9 14 11
 9 5 8 10 16 14 2 4 15 6
 10 2 16 1 5 4 15 12 11 7
 11 9 15 16 2 3 12 6 1 8
 12 15 2 3 6 5 14 7 13 1
 13 11 14 5 1 2 16 8 3 10
 14 16 1 2 4 6 11 13 7 9
 15 12 13 14 3 1 9 10 4 2
 16 14 6 4 10 7 3 1 8 12

设计46 $v=19, k=10, r=10, b=19, \lambda=5$

1 2 3 4 6 8 13 14 16 17
 2 3 4 5 7 9 14 15 17 18
 3 4 5 6 8 10 15 16 18 19
 4 5 6 7 9 11 16 17 19 1
 5 6 7 8 10 12 17 18 1 2
 6 7 8 9 11 13 18 19 2 3
 7 8 9 10 12 14 19 1 3 4
 8 9 10 11 13 15 1 2 4 5
 9 10 11 12 14 16 2 3 5 6
 10 11 12 13 15 17 3 4 6 7
 11 12 13 14 16 18 4 5 7 8
 12 13 14 15 17 19 5 6 3 9
 13 14 15 16 18 1 6 7 9 10
 14 15 16 17 19 2 7 8 10 11
 15 16 17 18 1 8 8 9 11 12
 16 17 18 19 2 4 9 10 12 13
 17 18 19 1 3 5 10 11 13 14
 18 19 1 2 4 6 11 12 14 15
 19 1 2 3 5 7 12 13 15 16

设计44 $v=19, k=3, r=9, b=57, \lambda=1$

I	II III	IV V VI	VII VIII IX
1 2 13	1 3 6	1 5 14	1 5 14
2 3 14	2 4 7	2 6 15	2 6 15
3 4 15	3 5 8	3 7 16	3 7 16
4 5 16	4 6 9	4 8 17	4 8 17
5 6 17	5 7 10	5 9 18	5 9 18
6 7 18	6 8 11	6 10 19	6 10 19
7 8 19	7 9 12	7 11 1	7 11 1
8 9 1	8 10 13	8 12 2	8 12 2
9 10 2	9 11 14	9 13 3	9 13 3
10 11 3	10 12 15	10 14 4	10 14 4
11 12 4	11 13 16	11 15 5	11 15 5
12 13 5	12 14 17	12 16 6	12 16 6
13 14 6	13 15 18	13 17 7	13 17 7
14 15 7	14 16 19	14 18 8	14 18 8
15 16 8	15 17 1	15 19 9	15 19 9
16 17 9	16 18 2	16 1 10	16 1 10
17 18 10	17 19 3	17 2 11	17 2 11
18 19 11	18 1 4	18 3 12	18 3 12
19 1 12	19 2 5	19 4 13	19 4 13

设计45 $v=19, k=9, r=9, b=19, \lambda=4$

1 3 5 6 7 8 11 14 15
 2 4 6 7 8 9 12 15 16
 3 5 7 8 9 10 13 16 17
 4 6 8 9 10 11 14 17 13
 5 7 9 10 11 12 15 13 19
 6 8 10 11 12 13 16 19 1
 7 9 11 12 13 14 17 1 2
 8 10 12 13 14 15 18 2 3
 9 11 13 14 15 16 19 3 4
 10 12 14 15 16 17 1 4 5
 11 13 15 16 17 18 2 5 6
 12 14 16 17 18 19 3 6 7
 13 15 17 18 19 1 4 7 3
 14 16 13 19 1 2 5 8 9
 15 17 19 1 2 3 6 9 10
 16 18 1 2 3 4 7 10 11
 17 19 2 3 4 5 8 11 12
 18 1 3 4 5 6 9 12 13
 19 2 4 5 6 7 10 13 14

设计47 $v=21, k=3, r=10, b=70, \lambda=1$

I	II	III	IV	V
1 2 3	1 4 15	1 5 17	1 6 9	1 7 21
4 5 6	2 5 11	2 4 14	2 7 16	2 13 17
7 8 9	3 9 16	3 7 11	3 3 21	3 10 18
10 11 12	6 17 20	6 10 19	4 17 19	4 8 11
13 14 15	7 12 19	8 16 20	5 10 13	5 13 19
16 17 18	8 13 18	9 15 18	11 15 20	6 12 15
19 20 21	10 14 21	12 13 21	12 14 18	9 17 20
VI	VII	VIII	IX	X
1 8 10	1 11 18	1 12 20	1 13 19	1 14 16
2 18 19	2 10 20	2 6 8	2 9 12	2 15 21
3 15 17	3 5 12	3 14 19	3 4 20	3 6 13
4 12 16	4 9 13	4 18 21	5 8 14	4 7 10
5 9 21	6 16 21	5 7 15	6 7 18	5 18 20
6 11 14	7 14 17	9 10 17	10 15 16	8 12 17
7 13 20	8 15 19	11 13 16	11 17 21	9 11 19

设计48 $v=21, k=5, r=5, b=21, \lambda=1$

1 2 5 15 17
 2 3 6 16 18
 3 4 7 17 19
 4 5 8 18 20
 5 6 9 19 21
 6 7 10 20 1
 7 8 11 21 2
 8 9 12 1 3
 9 10 13 2 4
 10 11 14 3 5
 11 12 15 4 6
 12 13 16 5 7
 13 14 17 6 8
 14 15 18 7 9
 15 16 19 8 10
 16 17 20 9 11
 17 18 21 10 12
 18 19 1 11 13
 19 20 2 12 14
 20 21 3 13 15
 21 1 4 14 16

设计49 $v=21, k=7, r=10, b=30, \lambda=3$

1 2 3 4 5 6 7 23 5 9 10 12 15 3 6 11 12 13 20 21
 1 2 4 8 9 11 21 23 12 14 16 18 19 3 7 8 9 15 17 18
 1 2 11 13 15 17 18 24 8 12 15 16 20 4 5 7 11 12 14 17
 1 3 7 8 10 14 20 25 10 11 17 19 20 4 5 9 14 18 20 21
 1 3 11 14 15 19 21 26 7 9 13 14 19 4 6 10 14 15 17 18
 1 4 9 10 16 18 19 26 8 14 16 17 21 4 7 12 13 15 19 21
 1 5 6 8 12 18 18 27 10 13 18 20 21 5 6 8 10 15 19 21
 1 5 13 14 15 16 20 34 6 10 11 13 16 5 7 8 11 16 18 19
 1 6 9 12 17 19 20 34 8 13 17 19 20 6 7 9 11 15 16 20
 1 7 10 12 16 17 21 35 9 13 16 17 21 8 9 10 11 12 13 14

设计50 $v=25, k=4, r=8, b=50, \lambda=1$

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1 2 6 25				1 3 11 19			
2 3 7 21				2 4 12 20			
3 4 8 22				3 5 13 16			
4 5 9 23				4 1 14 17			
5 1 10 24				5 2 15 18			
6 7 11 5				6 8 16 24			
7 8 12 1				7 9 17 25			
8 9 13 2				8 10 18 21			
9 10 14 3				9 6 19 22			
10 6 15 4				10 7 20 23			
11 12 16 10				11 13 21 4			
12 13 17 6				12 14 22 5			
13 14 13 7				13 15 23 1			
14 15 19 3				14 11 24 2			
15 11 20 9				15 12 25 3			
16 17 21 15				16 18 1 9			
17 18 22 11				17 19 2 10			
18 19 23 12				18 20 3 6			
19 20 24 13				19 16 4 7			
20 16 25 14				20 17 5 8			
21 22 1 20				21 23 6 14			
22 23 2 16				22 24 7 15			
23 24 3 17				23 25 8 11			
24 25 4 18				24 21 9 12			
25 21 5 19				25 22 10 13			

设计51 $v=25, k=5, r=6, b=30, \lambda=1$

I	II	III
1 2 3 4 5	1 6 11 16 21	1 7 13 20 24
6 7 8 9 10	2 7 12 17 22	2 8 14 16 25
11 12 13 14 15	3 8 13 18 23	3 9 15 17 21
16 17 18 19 20	4 9 14 19 24	4 10 11 13 22
21 22 23 24 25	5 10 15 20 25	5 6 12 19 23

IV	V	VI
1 8 15 19 22	1 9 12 18 25	1 10 14 17 23
2 9 11 20 23	2 10 13 19 21	2 6 15 18 24
3 10 12 16 24	3 6 14 20 22	3 7 11 19 25
4 6 13 17 25	4 7 15 16 23	4 8 12 20 21
5 7 14 18 21	5 8 11 17 24	5 9 13 16 22

设计52 $v=25, k=9, r=9, b=25, \lambda=3$

1 2 3 4 5 6 7 8 9
2 4 9 10 24 17 15 22 12
3 24 8 23 18 21 13 4 10
4 22 25 3 20 12 11 3 19
5 15 17 18 8 11 2 13 20
6 8 12 13 1 14 24 25 15
7 16 5 22 3 10 25 15 13
8 10 11 16 6 22 23 1 17
9 13 20 5 12 23 1 21 22
10 19 14 12 16 2 3 5 21
11 18 19 24 10 1 5 9 25
12 6 10 25 7 13 20 2 23
13 11 4 9 23 25 14 16 2
14 3 7 17 11 5 12 23 24
15 20 21 1 14 7 10 11 4
16 17 13 7 13 19 4 12 1
17 14 13 20 19 3 9 10 6
18 9 22 14 25 8 21 17 7
19 7 23 15 9 20 16 24 8
20 5 16 6 4 24 22 14 18
21 12 6 11 15 9 3 18 16
22 21 24 19 2 13 6 7 11
23 1 2 3 22 15 18 19 14
24 25 1 2 21 16 17 20 3
25 23 15 21 17 4 19 6 5

设计53 $v=28, k=4, r=9, b=63, \lambda=1$

I	II	III
28 1 10 19	28 2 11 20	28 3 12 21
2 9 13 16	3 1 14 17	4 2 15 18
3 8 11 13	4 9 12 10	5 1 13 11
4 7 23 24	5 8 24 25	6 9 25 26
5 6 20 27	6 7 21 19	7 8 22 20
12 17 22 25	13 13 23 26	14 10 21 27
14 15 21 26	15 16 22 27	16 17 23 19

IV	V	VI
28 4 13 22	28 5 14 23	23 6 15 24
5 3 16 10	6 4 17 11	7 5 13 12
6 2 14 12	7 3 15 13	8 4 16 14
7 1 26 27	8 2 27 19	9 3 19 20
8 9 23 21	9 1 24 22	1 2 25 23
15 11 25 19	16 12 26 20	17 13 27 21
17 18 24 20	18 10 25 21	10 11 26 22

VII	VIII	IX
23 7 16 25	23 8 17 26	23 9 18 27
8 6 10 13	9 7 11 14	1 8 12 15
9 5 17 15	1 6 18 16	2 7 10 17
1 4 20 21	2 5 21 22	3 6 22 23
2 3 26 24	3 4 27 25	4 5 19 26
18 14 19 22	10 15 20 23	11 16 21 24
11 12 27 23	12 13 19 24	13 14 20 25

设计54 $v=28, k=7, r=9, b=36, \lambda=2$

1 2 4 13 20 24 28	3 7 16 18 19 20 24
1 2 8 10 12 16 25	3 8 10 13 22 27 28
1 3 4 7 15 21 22	3 9 15 16 25 26 28
1 3 6 12 19 23 27	4 5 12 13 15 19 26
1 5 9 10 11 15 24	4 6 9 18 24 25 27
1 5 17 18 21 27 28	4 7 8 9 14 23 23
1 6 7 3 11 20 26	4 8 11 17 19 21 25
1 9 14 16 17 19 22	4 10 16 17 20 26 27
1 13 14 18 23 25 26	5 6 7 10 19 25 23
2 3 5 14 20 21 25	5 7 11 13 14 16 27
2 3 6 9 11 13 17	5 8 9 12 13 20 22
2 4 5 6 16 22 23	6 8 13 15 16 13 21
2 7 9 12 21 26 27	6 10 14 21 22 24 26
2 7 10 15 17 18 23	6 12 14 15 17 20 23
2 8 14 15 19 24 27	7 12 13 17 22 24 25
2 11 18 19 22 26 28	9 10 13 19 20 21 23
3 4 10 11 12 14 18	11 12 16 21 23 24 23
3 5 8 17 23 24 26	11 15 20 22 23 25 27

设计55 $v=31, k=6, r=6, b=31, \lambda=1$

1 2 4 11 15 27
2 3 5 12 16 23
3 4 6 13 17 29
4 5 7 14 18 30
5 6 8 15 19 31
6 7 9 16 20 1
7 8 10 17 21 2
8 9 11 18 22 3
9 10 12 19 23 4
10 11 13 20 24 5
11 12 14 21 25 6
12 13 15 22 26 7
13 14 16 23 27 8
14 15 17 24 28 9
15 16 18 25 29 10
16 17 19 26 30 11
17 18 20 27 31 12
18 19 21 23 1 13
19 20 22 29 2 14
20 21 23 30 3 15
21 22 24 31 4 16
22 23 25 1 5 17
23 24 26 2 6 18
24 25 27 3 7 19
25 26 28 4 8 20
26 27 29 5 9 21
27 28 30 6 10 22
28 29 31 7 11 23
29 30 1 8 12 24
30 31 2 9 13 25
31 1 3 10 14 26

设计56 $v=31, k=10, r=10, b=31, \lambda=3$

1 2 4 8 9 11 15 16 13 23
 2 3 12 9 10 17 16 19 5 22
 3 4 20 10 17 13 6 13 11 23
 4 5 7 11 12 21 13 14 19 24
 5 6 1 12 13 8 19 20 15 25
 6 7 13 16 14 9 20 21 2 26
 7 1 15 14 8 10 21 17 3 27
 8 11 17 25 16 23 29 7 26 5
 9 12 24 29 27 13 1 26 17 6
 10 13 18 19 29 25 2 27 23 7
 11 14 22 26 19 20 3 23 29 1
 12 8 27 23 20 29 4 22 21 2
 13 9 29 23 21 15 5 23 24 3
 14 10 25 22 15 16 24 29 6 4
 15 24 26 5 2 27 11 10 30 20
 16 25 6 30 3 23 12 11 27 21
 17 26 23 7 30 22 13 12 4 15
 13 27 23 1 5 30 14 13 22 16
 19 23 30 2 6 14 8 24 23 17
 20 22 3 3 7 24 9 30 25 18
 21 23 10 4 1 26 30 25 9 19
 22 21 11 17 24 1 25 2 31 13
 23 15 3 13 25 2 26 31 12 14
 24 16 19 31 26 3 27 4 13 3
 25 17 14 27 31 4 23 5 20 9
 26 13 5 21 23 31 22 6 3 10
 27 19 31 15 22 6 23 9 7 11
 23 20 16 24 23 7 31 1 10 12
 29 30 2 6 4 5 7 3 1 31
 30 31 9 13 11 12 10 8 14 29
 31 29 21 20 13 19 17 15 16 3)

设计58 $v=41, k=5, r=10, b=82, \lambda=1$

1 10 16 13 37 1 19 31 32 35
 2 11 17 19 33 2 20 32 33 36
 3 12 13 20 39 3 21 33 34 37
 4 13 19 21 40 4 22 34 35 33
 5 14 20 22 41 5 23 35 36 39
 6 15 21 23 1 6 24 36 37 40
 7 16 22 24 2 7 25 37 33 41
 8 17 23 25 3 8 26 33 39 1
 9 13 24 26 4 9 27 39 40 2
 10 19 25 27 5 10 23 40 41 3
 11 20 26 23 6 11 29 41 1 4
 12 21 27 29 7 12 30 1 2 5
 13 22 23 30 3 13 31 2 3 6
 14 23 29 31 9 14 32 3 4 7
 15 24 30 32 10 15 33 4 5 8
 16 25 31 33 11 16 34 5 6 9
 17 26 32 34 12 17 35 6 7 10
 18 27 33 35 13 18 36 7 3 11
 19 23 34 36 14 19 37 8 9 12
 20 29 35 37 15 20 38 9 10 13
 21 30 36 33 16 21 39 10 11 14
 22 31 37 39 17 22 40 11 12 15
 23 32 33 40 13 23 41 12 13 16
 24 33 39 41 19 24 1 13 14 17
 25 34 40 1 20 25 2 14 15 13
 26 35 41 2 21 26 3 15 16 19
 27 36 1 3 22 27 4 16 17 20
 23 37 2 4 23 28 5 17 13 21
 29 33 3 5 24 29 6 13 19 22
 30 39 4 6 25 30 7 19 20 23
 31 40 5 7 26 31 3 20 21 24
 32 41 6 8 27 32 9 21 22 25
 33 1 7 9 23 33 10 22 23 26
 34 2 8 10 29 34 11 23 24 27
 35 3 9 11 30 35 12 24 25 23
 36 4 10 12 31 36 13 25 26 29
 37 5 11 13 32 37 14 23 27 30
 33 6 12 14 33 38 15 27 23 31
 39 7 13 15 34 39 16 23 29 32
 40 3 14 16 35 40 17 29 30 33
 41 9 15 17 36 41 18 30 31 34

设计57 $v=37, k=9, r=9, b=37, \lambda=2$

1 2 4 3 13 25 26 30 36
 2 3 5 9 19 26 27 31 37
 3 4 6 10 20 27 23 32 1
 4 5 7 11 21 23 29 33 2
 5 6 8 12 22 29 30 34 3
 6 7 9 13 23 30 31 35 4
 7 3 10 14 24 31 32 36 5
 3 9 11 15 25 32 33 37 6
 9 10 12 16 26 33 34 1 7
 10 11 13 17 27 34 35 2 3
 11 12 14 18 23 35 36 3 9
 12 13 15 19 29 36 37 4 10
 13 14 16 20 30 37 1 5 11
 14 15 17 21 31 1 2 6 12
 15 16 18 22 32 2 3 7 13
 16 17 19 23 33 3 4 3 14
 17 18 20 24 34 4 5 9 15
 13 19 21 25 35 5 6 10 16
 19 20 22 26 36 6 7 11 17
 20 21 23 27 37 7 3 12 18
 21 22 24 23 1 3 9 13 19
 22 23 25 29 2 9 10 14 20
 23 24 26 30 3 10 11 15 21
 24 25 27 31 4 11 12 16 22
 25 26 23 32 5 12 13 17 23
 26 27 29 33 6 13 14 18 24
 27 23 30 34 7 14 15 19 25
 23 29 31 35 3 15 16 20 26
 29 30 32 36 9 16 17 21 27
 30 31 33 37 10 17 13 22 23
 31 32 34 1 11 13 19 23 29
 32 33 35 2 12 19 20 24 30
 33 34 36 3 13 20 21 25 31
 34 35 37 4 14 21 22 26 32
 25 36 1 5 15 22 23 27 33
 36 37 2 6 16 23 24 23 34
 37 1 3 7 17 24 25 29 35

设计 59 $v=49, k=7, r=8, b=56, \lambda=1$

I	II	III
1 2 3 4 5 6 7	1 8 15 22 29 36 43	1 9 18 24 35 40 48
8 9 10 11 12 13 14	2 9 16 23 30 37 44	2 10 19 25 29 41 49
15 16 17 18 19 20 21	3 10 17 24 31 38 45	3 11 20 26 30 42 43
22 23 24 25 26 27 28	4 11 18 25 32 39 46	4 12 21 27 31 36 44
29 30 31 32 33 34 35	5 12 19 26 33 40 47	5 13 15 28 32 37 45
36 37 38 39 40 41 42	6 13 20 27 34 41 48	6 14 16 22 33 38 46
43 44 45 46 47 48 49	7 14 21 28 35 42 49	7 8 17 23 34 39 47
IV	V	VI
1 10 21 26 34 37 46	1 11 17 23 33 41 44	1 12 20 23 32 33 49
2 11 15 27 35 38 47	2 12 18 22 34 42 45	2 13 21 24 33 39 43
3 12 16 28 29 39 48	3 13 19 23 35 36 46	3 14 15 25 34 40 44
4 13 17 22 30 40 49	4 14 20 24 29 37 47	4 8 16 26 35 41 45
5 14 13 23 31 41 43	5 8 21 25 30 33 48	5 9 17 27 29 42 46
6 3 19 24 32 42 44	6 9 15 26 31 39 49	6 10 18 28 30 36 47
7 9 20 25 33 36 45	7 10 16 27 32 40 43	7 11 19 22 31 37 48
VII	VIII	
1 13 16 25 31 42 47	1 14 19 27 30 39 45	
2 14 17 26 32 36 43	2 8 20 28 31 40 46	
3 8 18 27 33 37 49	3 9 21 22 32 41 47	
4 9 19 23 34 33 43	4 10 15 23 33 42 48	
5 10 20 22 35 39 44	5 11 16 24 34 36 49	
6 11 21 23 29 40 45	6 12 17 25 35 37 43	
7 12 15 24 30 41 46	7 13 18 26 29 38 44	

设计 60 $v=57, k=8, r=8, b=57, \lambda=1$

1 4 6 14 15 21 33 37	30 33 35 43 44 50 5 9
2 5 7 15 16 22 34 33	31 34 36 44 45 51 6 10
3 6 8 16 17 23 35 39	32 35 37 45 46 52 7 11
4 7 9 17 18 24 36 40	33 36 38 46 47 53 8 12
5 8 10 18 19 25 37 41	34 37 39 47 48 54 9 13
6 9 11 19 20 26 38 42	35 38 40 48 49 55 10 14
7 10 12 20 21 27 39 43	36 39 41 49 50 56 11 15
8 11 13 21 22 23 40 44	37 40 42 50 51 57 12 16
9 12 14 22 23 29 41 45	38 41 43 51 52 1 13 17
10 13 15 23 24 30 42 46	39 42 44 52 53 2 14 13
11 14 16 24 25 31 43 47	40 43 45 53 54 3 15 19
12 15 17 25 26 32 44 48	41 44 46 54 55 4 16 20
13 16 18 26 27 33 45 49	42 45 47 55 56 5 17 21
14 17 19 27 28 34 46 50	43 46 48 56 57 6 18 22
15 18 20 28 29 35 47 51	44 47 49 57 1 7 19 23
16 19 21 29 30 36 48 52	45 48 50 1 2 8 20 24
17 20 22 30 31 37 49 53	46 49 51 2 3 9 21 25
18 21 23 31 32 33 50 54	47 50 52 3 4 10 22 26
19 22 24 32 33 39 51 55	43 51 53 4 5 11 23 27
20 23 25 33 34 40 52 56	49 52 54 5 6 12 24 28
21 24 26 34 35 41 53 57	50 53 55 6 7 13 25 29
22 25 27 35 36 42 54 1	51 54 56 7 8 14 26 30
23 26 28 36 37 43 55 2	52 55 57 8 9 15 27 31
24 27 29 37 38 44 56 3	53 56 1 9 10 16 28 32
25 28 30 38 39 45 57 4	54 57 2 10 11 17 29 33
26 29 31 39 40 46 1 5	55 1 3 11 12 18 30 34
27 30 32 40 41 47 2 6	56 2 4 12 13 19 31 35
28 31 33 41 42 43 3 7	57 3 5 13 14 20 32 36
29 32 34 42 43 49 4 8	

设计 61 $v=64, k=8, r=9, b=72, \lambda=1$

I								II								III							
1 2 3 4 5 6 7 8	9 10 11 12 13 14 15 16	17 18 19 20 21 22 23 24	25 26 27 28 29 30 31 32	33 34 35 36 37 38 39 40	41 42 43 44 45 46 47 48	49 50 51 52 53 54 55 56	57 58 59 60 61 62 63 64	1 9 17 25 33 41 49 57	2 10 13 26 34 42 50 58	3 11 19 27 35 43 51 59	4 12 20 23 36 44 52 60	5 13 21 29 37 45 53 61	6 14 22 30 33 46 54 62	7 15 23 31 39 47 55 63	8 16 24 32 40 48 56 64	1 10 19 29 38 43 52 63	2 9 20 30 37 47 51 64	3 12 17 31 40 46 50 61	4 11 18 32 39 45 49 62	5 14 23 25 34 44 56 59	6 13 24 26 33 43 55 60	7 16 21 27 36 42 54 57	8 15 22 28 35 41 53 58
IV								V								VI							
1 11 21 30 40 44 55 58	2 12 22 29 39 43 56 57	3 9 23 32 38 42 53 60	4 10 24 31 37 41 54 59	5 15 17 26 36 43 51 62	6 16 18 25 35 47 52 61	7 13 19 28 34 46 49 64	8 14 20 27 33 45 50 63	1 12 23 26 35 45 54 64	2 11 24 25 36 46 53 63	3 10 21 28 33 47 56 62	4 9 22 27 34 48 55 61	5 16 19 30 39 41 60 60	6 15 20 29 40 42 49 59	7 14 17 32 37 43 52 53	8 13 18 31 38 44 51 57	1 13 22 32 36 47 50 59	2 14 21 31 35 48 49 60	3 15 24 30 34 45 52 57	4 16 23 29 33 46 51 53	5 9 18 28 40 43 54 63	6 10 17 27 39 44 53 64	7 11 20 26 33 41 56 61	8 12 19 25 37 42 55 62
VII								VIII								IX							
1 14 24 28 39 42 51 61	2 13 23 27 40 41 52 62	3 16 22 26 37 44 49 63	4 15 21 25 33 43 50 64	5 10 20 32 35 46 55 57	6 9 19 31 36 45 56 58	7 12 18 30 38 48 53 59	8 11 17 29 34 47 54 60	1 15 18 27 37 46 56 60	2 16 17 28 33 45 55 59	3 13 20 25 39 43 54 63	4 14 19 26 40 47 53 57	5 11 22 31 33 42 52 64	6 12 21 32 34 41 51 63	7 9 24 29 35 44 50 62	8 10 23 30 36 43 49 61	1 16 20 31 34 43 53 62	2 15 19 32 33 44 54 61	3 14 18 29 36 41 55 64	4 13 17 30 25 42 56 63	5 12 24 27 33 47 49 53	6 11 23 28 37 43 50 57	7 10 22 25 40 45 51 60	8 9 21 26 39 46 52 59

设计 62 $v=73, k=9, r=9, b=73, \lambda=1$

1 2 4 8 16 32 37 55 64	2 3 5 9 17 33 38 56 65	3 4 6 10 18 34 39 57 66	4 5 7 11 19 35 40 58 67	5 6 8 12 20 36 41 59 63	6 7 9 13 21 37 42 60 69	7 8 10 14 22 33 43 61 70	8 9 11 15 23 39 44 62 71	9 10 12 16 24 40 45 63 72	10 11 13 17 25 41 46 64 73	11 12 14 18 26 42 47 65 1	12 13 15 19 27 43 48 66 2	13 14 16 20 28 44 49 67 3	14 15 17 21 29 45 50 63 4	15 16 18 22 30 46 51 69 5	16 17 19 23 31 47 52 70 6	17 18 20 24 32 48 53 71 7	18 19 21 25 33 49 54 72 8	19 20 22 26 34 50 55 73 9	20 21 23 27 35 51 56 1 10	21 22 24 28 36 52 57 2 11	22 23 25 29 37 53 58 3 12	23 24 26 30 38 54 59 4 13	24 25 27 31 39 55 60 5 14	25 26 23 32 40 56 61 6 15	26 27 29 33 41 57 62 7 16	27 23 30 34 42 58 63 8 17	28 29 31 35 43 59 64 9 18	29 30 32 36 44 60 65 10 19	30 31 33 37 45 61 66 11 20	31 32 34 38 46 62 67 12 21	32 33 35 39 47 63 68 13 22	33 34 36 40 48 64 69 14 23	34 35 37 41 49 65 70 15 24	35 36 38 42 50 66 71 16 25	36 37 39 43 51 67 72 17 26	37 38 40 44 52 68 73 18 27	38 39 41 45 53 69 1 19 23	39 40 42 46 54 70 2 20 29	40 41 43 47 55 71 3 21 30	41 42 44 48 56 72 4 22 31	42 43 45 49 57 73 5 23 32	43 44 46 50 53 1 6 24 33	44 45 47 51 59 2 7 25 34	45 46 48 52 60 3 3 26 35	46 47 49 53 61 4 9 27 36	47 48 50 54 62 5 10 23 37	48 49 51 55 63 6 11 29 38	49 50 52 56 64 7 12 30 39	50 51 53 57 65 8 13 31 40	51 52 54 58 66 9 14 32 41	52 53 55 59 67 10 15 33 42	53 54 56 60 68 11 16 34 43	54 55 57 61 69 12 17 35 44	55 56 58 62 70 13 18 36 45	56 57 59 63 71 14 19 37 46	57 58 60 64 72 15 20 38 47	58 59 61 65 73 16 21 39 43	59 60 62 66 1 17 22 40 49	60 61 63 67 2 18 23 41 50	61 62 64 68 3 19 24 42 51	62 63 65 69 4 20 25 43 52	63 64 66 70 5 21 26 44 53	64 65 67 71 6 22 27 45 54	65 66 68 72 7 23 28 46 55	66 67 69 73 8 24 29 47 56	67 68 70 1 9 25 30 43 57	68 69 71 2 10 26 31 49 53	69 70 72 3 11 27 32 50 59	70 71 73 4 12 28 33 51 60	71 72 1 5 13 29 34 52 61	72 73 2 6 14 30 35 53 62	73 1 3 7 15 31 36 54 63
------------------------	------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------	---------------------------	----------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	--------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------

设计 63 $v=81, k=9, r=10, b=90, \lambda=1$

I

1 2 3 4 5 6 7 8 9
 10 11 12 13 14 15 16 17 18
 19 20 21 22 23 24 25 26 27
 28 29 30 31 32 33 34 35 36
 37 38 39 40 41 42 43 44 45
 46 47 48 49 50 51 52 53 54
 55 56 57 58 59 60 61 62 63
 64 65 66 67 68 69 70 71 72
 73 74 75 76 77 78 79 80 81

II

1 10 19 28 37 46 55 64 73
 2 11 20 29 38 47 56 65 74
 3 12 21 30 39 48 57 66 75
 4 13 22 31 40 49 58 67 76
 5 14 23 32 41 50 59 68 77
 6 15 24 33 42 51 60 69 78
 7 16 25 34 43 52 61 70 79
 8 17 26 35 44 53 62 71 80
 9 18 27 36 45 54 63 72 81

III

1 11 22 35 48 61 69 77
 2 12 23 36 43 46 62 67 73
 3 10 24 34 44 47 63 68 76
 4 14 25 29 39 51 55 72 80
 5 15 26 30 37 49 56 70 81
 6 13 27 28 38 50 57 71 79
 7 17 19 32 42 54 58 66 74
 8 18 20 33 40 52 59 64 75
 9 16 21 31 41 53 60 65 73

IV

1 12 25 33 41 47 58 71 81
 2 10 26 31 42 43 59 72 79
 3 11 27 32 40 46 60 70 80
 4 15 19 36 44 50 61 65 75
 5 13 20 34 45 51 62 66 78
 6 14 21 35 48 49 63 64 74
 7 18 22 30 38 53 55 63 78
 8 16 23 28 39 54 56 69 76
 9 17 24 29 37 52 57 67 77

V

1 13 26 36 39 52 60 68 74
 2 14 27 34 37 58 58 69 75
 3 15 25 35 38 54 59 67 73
 4 16 20 30 42 46 63 71 77
 5 17 21 28 40 47 61 72 78
 6 18 19 29 41 48 62 70 76
 7 10 23 33 45 49 57 65 80
 8 11 24 31 43 50 55 66 81
 9 12 22 32 44 51 56 64 79

VI

1 14 20 31 44 54 57 70 78
 2 15 21 32 45 52 55 71 76
 3 13 19 33 43 53 56 72 77
 4 17 23 34 38 43 60 64 81
 5 18 24 35 39 46 53 65 79
 6 16 22 36 37 47 59 66 80
 7 11 26 28 41 51 63 67 75
 8 12 27 29 42 49 61 68 73
 9 10 25 30 40 50 62 69 74

VII

1 15 23 29 40 53 63 66 79
 2 13 24 30 41 54 61 64 80
 3 14 22 28 42 52 62 65 81
 4 18 26 32 43 47 57 69 73
 5 16 27 33 44 48 55 67 74
 6 17 25 31 45 46 56 68 75
 7 12 20 35 37 50 60 72 76
 8 10 21 36 38 51 58 70 77
 9 11 19 34 39 49 59 71 78

VIII

1 16 24 32 38 49 62 72 75
 2 17 22 33 39 50 68 70 78
 3 18 23 31 37 51 61 71 74
 4 10 27 35 41 52 56 66 73
 5 11 25 36 42 53 57 64 76
 6 12 26 34 40 54 55 65 77
 7 13 21 29 44 46 59 69 81
 8 14 19 30 45 47 60 67 79
 9 15 20 23 43 43 58 68 80

IX

1 17 27 30 43 51 59 65 76
 2 18 25 23 44 49 60 66 77
 3 16 26 29 45 50 58 64 73
 4 11 21 33 37 54 62 63 79
 5 12 19 31 38 52 63 69 80
 6 10 20 32 39 53 61 67 81
 7 14 24 36 40 48 56 71 73
 8 15 22 34 41 46 57 72 74
 9 13 23 35 42 47 55 70 75

X

1 13 21 34 42 50 56 67 80
 2 18 19 35 40 51 57 63 81
 3 17 20 36 41 49 55 69 79
 4 12 24 28 45 53 59 70 74
 5 10 22 29 43 54 60 71 75
 6 11 23 30 44 52 58 72 77
 7 15 27 31 39 47 62 64 77
 8 13 25 32 37 43 63 65 78
 9 14 26 33 38 46 61 66 76

设计 64 $v=91, k=10, r=10, b=91, \lambda=1$

1	2	7	11	24	27	35	42	54	56	47	48	53	57	70	73	81	83	9	11	
2	3	8	12	25	28	36	43	55	57	48	49	54	58	71	74	82	89	10	12	
3	4	9	13	26	29	37	44	56	53	49	50	55	59	72	75	83	90	11	13	
4	5	10	14	27	30	38	45	57	59	50	51	56	60	73	76	84	91	12	14	
5	6	11	15	23	31	39	46	53	60	51	52	57	61	74	77	85	1	13	15	
6	7	12	16	29	32	40	47	59	61	52	53	58	62	75	73	86	2	14	16	
7	8	13	17	30	33	41	48	60	62	53	54	59	63	76	79	87	3	15	17	
8	9	14	18	31	34	42	49	61	63	54	55	60	64	77	30	83	4	16	18	
9	10	15	19	32	35	43	50	62	64	55	56	61	65	73	81	89	5	17	19	
10	11	16	20	33	36	44	51	63	65	56	57	62	66	79	32	90	6	18	20	
11	12	17	21	34	37	45	52	64	66	57	58	63	67	80	83	91	7	19	21	
12	13	18	22	35	38	46	53	65	67	58	59	64	68	81	84	1	8	20	22	
13	14	19	23	36	39	47	54	66	63	59	60	65	69	82	85	2	9	21	23	
14	15	20	24	37	40	48	55	67	69	60	61	66	70	83	86	3	10	22	24	
15	16	21	25	38	41	49	56	63	70	61	62	67	71	84	37	4	11	23	25	
16	17	22	26	39	42	50	57	69	71	62	63	68	72	85	38	5	12	24	26	
17	18	23	27	40	43	51	53	70	72	63	64	69	73	86	39	6	13	25	27	
18	19	24	28	41	44	52	59	71	73	64	65	70	74	87	90	7	14	26	28	
19	20	25	29	42	45	53	60	72	74	65	66	71	75	88	91	8	15	27	29	
20	21	26	30	43	46	54	61	73	75	66	67	72	76	39	1	9	16	28	30	
21	22	27	31	44	47	55	62	74	76	67	68	73	77	90	2	10	17	29	31	
22	23	28	32	45	48	56	63	75	77	68	69	74	78	91	3	11	18	30	32	
23	24	29	33	46	49	57	64	76	78	69	70	75	79	1	4	12	19	31	33	
24	25	30	34	47	50	58	65	77	79	70	71	76	80	2	5	13	20	32	34	
25	26	31	35	48	51	59	66	73	80	71	72	77	81	3	6	14	21	33	35	
26	27	32	36	49	52	60	67	79	81	72	73	78	82	4	7	15	22	34	36	
27	28	33	37	50	53	61	68	80	82	73	74	79	83	5	8	16	23	35	37	
28	29	34	38	51	54	62	69	81	83	74	75	80	84	6	9	17	24	36	38	
29	30	35	39	52	55	63	70	82	84	75	76	81	85	7	10	18	25	37	39	
30	31	36	40	53	56	64	71	83	85	76	77	82	86	8	11	19	26	38	40	
31	32	37	41	54	57	65	72	84	86	77	78	83	87	9	12	20	27	39	41	
32	33	38	42	55	58	66	73	85	87	78	79	84	88	10	13	21	28	40	42	
33	34	39	43	56	59	67	74	86	88	79	80	85	89	11	14	22	29	41	43	
34	35	40	44	57	60	68	75	87	89	80	81	86	90	12	15	23	30	42	44	
35	36	41	45	58	61	69	76	88	90	81	82	87	91	13	16	24	31	43	45	
36	37	42	46	59	62	70	77	89	91	82	83	88	1	14	17	25	32	44	46	
37	38	43	47	60	63	71	73	90	1	83	84	89	2	15	18	26	33	45	47	
38	39	44	48	61	64	72	79	91	2	84	85	90	3	16	19	27	34	46	48	
39	40	45	49	62	65	73	80	1	3	85	86	91	4	17	20	28	35	47	49	
40	41	46	50	63	66	74	81	2	4	86	87	1	5	18	21	29	36	48	50	
41	42	47	51	64	67	75	82	3	5	87	88	2	6	19	22	30	37	49	51	
42	43	48	52	65	68	76	83	4	6	88	89	3	7	20	23	31	38	50	52	
43	44	49	53	66	69	77	84	5	7	89	90	4	8	21	24	32	39	51	53	
44	45	50	54	67	70	73	85	6	8	90	91	5	9	22	25	33	40	52	54	
45	46	51	55	63	71	79	86	7	9	91	1	6	10	23	26	34	41	53	55	
46	47	52	56	69	72	30	37	8	10											

33. 随 机 数 表

08 47 45 73 86	26 93 47 36 61	46 93 63 71 62	33 26 16 80 45	60 11 14 10 95
97 74 24 67 62	42 81 14 57 20	42 53 32 37 32	27 07 36 07 51	24 51 79 89 73
16 76 62 27 66	56 50 28 71 07	22 90 79 78 52	13 55 33 53 59	88 97 54 14 10
12 53 85 99 26	96 96 63 27 31	05 03 72 93 15	57 12 10 14 21	83 26 49 31 76
55 59 56 35 64	33 54 82 46 22	81 62 43 09 90	06 18 44 32 53	23 83 01 30 30
16 22 77 94 39	49 54 43 54 82	17 37 93 23 78	87 35 20 96 43	84 26 34 91 64
84 42 17 53 31	57 24 55 06 88	77 04 74 47 67	21 76 33 50 25	83 92 12 06 76
63 01 63 73 59	16 05 55 67 19	93 10 50 71 75	12 86 73 58 07	44 39 52 33 79
33 21 12 34 29	73 64 56 07 82	52 42 07 44 33	15 51 00 13 42	99 66 02 79 54
57 60 86 32 44	09 47 27 96 54	49 17 46 09 62	90 52 84 77 27	08 02 73 43 23
18 18 07 92 45	44 17 16 53 09	79 83 86 19 62	06 76 50 03 10	55 23 64 05 05
26 62 33 97 75	84 16 07 44 99	83 11 46 32 24	20 14 85 88 45	10 93 72 88 71
23 42 40 64 74	82 97 77 77 81	07 45 32 14 03	32 93 94 07 72	93 85 79 10 75
52 36 23 19 95	50 92 26 11 97	00 56 76 31 38	80 22 02 53 53	86 60 42 04 53
37 85 94 35 12	83 39 50 03 30	42 34 07 96 88	54 42 06 87 98	35 85 29 43 39
70 29 17 12 13	40 33 20 33 26	13 89 51 03 74	17 76 37 13 04	07 74 21 19 30
56 62 18 37 35	96 83 50 87 75	97 12 25 93 47	70 33 24 03 54	97 77 46 44 80
99 49 57 22 77	88 42 95 45 72	16 64 36 16 00	04 43 18 66 79	94 77 24 21 90
16 03 15 04 72	33 27 14 34 09	45 59 34 68 49	12 72 07 34 45	99 27 72 95 14
31 16 93 32 43	50 27 89 87 19	20 15 37 00 49	52 85 66 60 44	38 68 88 11 80
63 34 30 13 70	55 74 30 77 40	44 22 78 84 26	04 33 46 09 52	68 07 97 06 57
74 57 25 65 76	59 29 97 68 60	71 91 33 67 54	13 58 18 24 76	15 54 55 95 52
27 42 37 86 53	43 55 90 65 72	96 57 69 36 10	96 46 92 42 45	97 00 42 04 91
00 39 68 29 61	66 37 32 20 30	77 84 57 03 29	10 45 65 04 26	11 04 96 67 24
29 94 93 94 24	68 49 69 10 82	53 75 91 93 30	34 25 20 67 27	40 43 73 51 92
16 90 82 66 59	83 62 64 11 12	67 19 00 71 74	60 47 21 29 63	02 02 37 03 31
11 27 94 75 06	06 09 19 74 66	02 94 37 34 02	76 70 90 30 86	33 45 94 30 33
35 24 10 16 20	33 32 51 26 33	79 73 45 04 91	16 92 53 56 16	02 75 50 95 93
33 23 16 86 33	42 33 97 01 50	87 75 66 81 41	40 01 74 91 62	43 51 84 03 32
31 96 25 91 47	96 44 33 49 13	34 86 82 53 91	00 52 43 43 85	27 55 26 89 62
66 67 40 67 14	64 05 71 95 86	11 05 65 09 63	76 83 20 37 90	57 16 00 11 66
14 90 84 45 11	75 73 88 05 90	52 27 41 14 86	22 93 12 22 03	07 52 74 95 80
63 05 51 18 00	33 93 02 75 19	07 60 62 93 55	59 33 82 43 90	49 37 38 44 59
20 46 78 73 90	97 51 40 14 02	04 02 33 31 03	39 54 16 49 36	47 95 93 13 30
64 19 53 97 79	15 06 15 93 20	01 90 10 75 06	40 78 78 89 62	02 67 74 17 33
05 26 93 70 60	22 35 85 15 13	92 03 51 59 77	59 56 78 06 83	52 91 05 70 74
07 97 10 88 23	09 93 42 99 64	61 71 62 99 15	06 51 29 16 93	58 05 77 09 51
63 71 86 85 85	54 87 66 47 54	73 32 08 11 12	44 95 92 63 16	29 56 24 29 43
26 99 61 65 53	53 37 78 80 70	42 10 50 67 42	32 17 55 35 74	94 44 67 16 94
14 65 52 68 75	87 59 36 22 41	26 78 63 06 55	13 08 27 01 50	15 29 39 39 43
17 53 77 53 71	71 41 61 50 72	12 41 94 96 26	44 95 27 36 99	02 96 74 30 33
90 26 59 21 19	23 52 23 33 12	96 93 02 18 39	07 02 18 36 07	25 99 32 70 23
41 23 52 55 99	31 04 49 69 96	10 47 48 45 88	13 41 43 89 20	97 17 14 49 17
60 20 50 81 69	31 99 73 63 63	35 81 33 03 76	24 30 12 43 60	18 99 10 72 34
91 25 33 05 90	94 58 28 41 36	45 37 59 03 09	90 35 57 29 12	82 62 54 65 60
34 50 57 74 37	93 80 33 00 91	09 77 93 19 82	74 94 80 04 04	45 07 31 66 49
85 22 04 39 43	73 81 53 94 79	33 62 46 86 28	08 31 54 46 31	53 94 13 33 47
09 79 13 77 43	73 82 97 22 21	05 03 27 24 83	72 89 44 05 60	35 80 39 94 88
88 75 80 18 14	22 95 75 42 49	39 32 82 22 49	02 43 07 70 37	16 04 61 67 87
90 96 23 70 00	39 00 03 06 90	55 85 78 33 36	94 37 30 69 32	90 89 00 76 33

53 74 23 99 67	61 32 28 69 84	94 62 67 86 24	98 33 41 19 95	47 53 53 33 09
63 38 06 86 54	99 00 65 26 94	02 32 90 23 07	79 62 67 80 60	75 91 12 81 19
35 30 58 21 48	06 72 17 10 94	25 21 31 75 96	49 28 24 00 49	55 65 79 73 07
63 43 36 82 69	65 51 18 37 88	61 38 44 12 45	32 92 85 88 65	54 34 31 85 35
98 25 37 55 26	01 91 82 81 46	74 71 12 94 97	24 02 71 37 07	03 92 18 66 75
02 63 21 17 69	71 50 80 89 56	38 15 70 11 48	43 40 45 86 93	00 83 26 91 03
64 55 22 21 82	43 22 28 06 00	61 54 13 43 91	82 78 12 23 29	06 66 24 12 27
85 07 26 13 89	01 10 07 82 04	59 63 69 36 03	69 11 15 83 80	13 29 54 19 23
58 54 16 24 15	51 54 44 82 00	62 61 65 04 69	38 18 65 18 97	85 72 13 49 21
34 85 27 84 87	61 48 64 56 26	90 18 48 13 26	37 70 15 42 67	65 65 80 39 07
03 92 18 27 46	57 99 16 96 56	30 33 72 85 22	84 64 33 56 93	99 01 30 93 64
62 93 30 27 59	37 75 41 66 48	86 97 30 61 45	23 53 04 01 63	45 76 08 64 27
03 45 93 15 22	60 21 75 46 91	93 77 27 85 42	23 83 61 08 84	69 62 03 42 73
07 03 55 18 40	45 44 75 13 90	24 94 96 61 02	57 55 66 83 15	73 42 37 11 61
01 85 89 95 66	51 10 19 34 88	15 84 97 19 75	12 76 39 43 78	64 63 91 03 25
72 84 71 14 35	19 11 53 49 26	50 11 17 17 76	86 31 57 20 18	95 60 78 46 75
83 78 23 16 84	13 52 53 94 53	75 45 69 30 96	73 89 65 70 31	99 17 43 48 76
45 17 75 65 57	23 40 19 72 12	25 12 74 75 67	60 40 60 81 19	24 62 01 61 16
96 76 23 12 54	22 01 11 94 25	71 96 16 16 88	68 64 36 74 45	19 59 50 88 92
43 31 67 72 30	24 02 94 08 63	83 82 36 66 02	69 36 38 25 39	48 03 45 15 22
50 44 66 44 21	66 06 58 05 62	68 15 54 35 02	42 35 48 96 32	14 52 41 52 43
22 66 22 15 86	26 63 75 41 99	58 42 96 72 24	58 87 52 18 51	03 37 18 39 11
96 24 40 14 51	23 22 30 88 57	95 67 47 29 83	94 69 40 06 07	18 16 36 73 86
31 73 91 61 19	60 20 72 93 48	93 57 07 23 69	65 95 39 69 58	56 80 90 19 44
78 60 73 99 84	43 89 94 36 45	56 69 47 07 41	90 22 91 07 12	78 35 34 08 72
84 37 90 61 56	70 10 22 93 05	85 11 84 76 60	76 48 45 34 60	01 64 18 39 96
36 67 10 08 23	93 93 35 03 86	99 29 76 29 81	33 34 91 58 93	63 14 52 32 52
07 23 59 07 48	89 64 53 89 75	83 85 62 27 89	80 14 73 56 27	86 63 59 30 02
10 15 33 87 60	79 24 31 66 56	21 43 24 06 93	91 93 94 05 49	01 47 59 33 00
55 19 63 97 65	03 73 52 16 56	00 53 55 90 27	33 42 29 83 87	22 13 88 83 34
58 81 29 13 89	35 01 20 71 34	62 33 74 82 14	53 73 19 09 03	56 54 29 56 93
51 36 32 63 92	33 93 74 66 99	40 14 71 94 58	45 94 19 38 31	14 44 99 31 07
35 91 70 29 13	30 03 54 07 27	96 94 78 32 66	50 95 52 74 33	13 80 55 62 54
37 71 67 95 18	20 02 44 95 94	64 85 04 05 72	01 32 90 76 14	53 89 74 60 41
93 66 13 83 27	92 79 64 64 72	23 54 96 58 84	48 14 52 93 94	56 07 93 89 30
02 96 08 45 65	13 05 00 41 84	93 07 54 72 59	21 45 57 09 77	19 48 56 27 44
49 83 43 48 35	82 83 33 69 96	72 36 04 19 76	47 45 15 18 60	82 11 03 95 97
84 60 71 62 46	40 80 81 30 37	34 39 23 05 38	25 15 35 71 30	88 12 57 21 77
18 17 30 83 71	44 91 14 88 47	89 23 80 63 15	56 34 20 47 89	99 82 93 24 93
79 69 10 61 78	71 32 76 95 62	87 00 22 53 40	92 54 01 75 25	43 11 71 99 31
75 93 36 57 83	56 20 14 32 11	74 21 97 90 65	96 42 63 63 86	74 54 13 26 94
38 30 92 29 03	06 23 81 39 33	62 25 06 34 63	61 29 03 93 67	04 32 92 03 09
51 29 50 10 34	31 57 75 95 80	51 97 02 74 77	76 15 48 49 44	18 55 63 77 09
21 31 38 86 24	37 79 31 53 74	73 24 16 10 33	52 83 90 94 76	70 47 14 54 36
29 01 23 37 83	58 02 39 37 67	42 10 14 20 92	16 55 23 42 45	54 96 09 11 06
95 33 95 22 00	18 74 72 00 13	33 79 53 69 32	81 76 80 26 92	32 80 84 25 39
90 84 60 79 80	24 36 59 87 33	82 07 53 89 35	96 35 23 79 13	05 93 90 07 35
46 40 62 93 82	54 97 20 56 95	15 74 30 08 32	16 46 70 50 80	67 72 16 42 79
20 31 89 03 43	38 46 32 68 72	32 14 82 99 70	80 60 47 13 97	63 49 30 21 30
71 59 73 05 50	08 22 23 71 77	91 01 93 20 49	32 96 59 26 94	66 39 67 93 60

34. 平方 表

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
10	10 000	10 201	10 404	10 609	10 816	11 025	11 236	11 449	11 664	11 881	10
11	12 100	12 321	12 544	12 769	12 996	13 225	13 456	13 689	13 924	14 161	11
12	14 400	14 641	14 884	15 129	15 376	15 625	15 876	16 129	16 384	16 641	12
13	16 900	17 161	17 424	17 689	17 956	18 225	18 496	18 769	19 044	19 321	13
14	19 600	19 881	20 164	20 449	20 736	21 025	21 316	21 609	21 904	22 201	14
15	22 500	22 801	23 104	23 409	23 716	24 025	24 336	24 649	24 964	25 281	15
16	25 600	25 921	26 244	26 569	26 896	27 225	27 556	27 889	28 224	28 561	16
17	28 900	29 241	29 584	29 929	30 276	30 625	30 976	31 329	31 684	32 041	17
18	32 400	32 761	33 124	33 489	33 856	34 225	34 596	34 969	35 344	35 721	18
19	36 100	36 481	36 864	37 249	37 636	38 025	38 416	38 809	39 204	39 601	19
20	40 000	40 401	40 804	41 209	41 616	42 025	42 436	42 849	43 264	43 681	20
21	44 100	44 521	44 944	45 369	45 796	46 225	46 656	47 089	47 524	47 961	21
22	48 400	48 841	49 284	49 729	50 176	50 625	51 076	51 529	51 984	52 441	22
23	52 900	53 361	53 824	54 289	54 756	55 225	55 696	56 169	56 644	57 121	23
24	57 600	58 081	58 564	59 049	59 536	60 025	60 516	61 009	61 504	62 001	24
25	62 500	63 001	63 504	64 009	64 516	65 025	65 536	66 049	66 564	67 081	25
26	67 600	68 121	68 644	69 169	69 696	70 225	70 756	71 289	71 824	72 361	26
27	72 900	73 441	73 984	74 529	75 076	75 625	76 176	76 729	77 284	77 841	27
28	78 400	78 961	79 524	80 089	80 656	81 225	81 796	82 369	82 944	83 521	28
29	84 100	84 681	85 264	85 849	86 436	87 025	87 616	88 209	88 804	89 401	29
30	90 000	90 601	91 204	91 809	92 416	93 025	93 636	94 249	94 864	95 481	30
31	96 100	96 721	97 344	97 969	98 596	99 225	99 856	100 489	101 124	101 761	31
32	102 400	103 041	103 684	104 329	104 976	105 625	106 276	106 929	107 584	108 241	32
33	108 900	109 561	110 224	110 889	111 556	112 225	112 896	113 569	114 244	114 921	33
34	115 600	116 281	116 964	117 649	118 336	119 025	119 716	120 409	121 104	121 801	34
35	122 500	123 201	123 904	124 609	125 316	126 025	126 736	127 449	128 164	128 881	35
36	129 600	130 321	131 044	131 769	132 496	133 225	133 956	134 689	135 424	136 161	36
37	136 900	137 641	138 384	139 129	139 876	140 625	141 376	142 129	142 884	143 641	37
38	144 400	145 161	145 924	146 689	147 456	148 225	148 996	149 769	150 544	151 321	38
39	152 100	152 881	153 664	154 449	155 236	156 025	156 816	157 609	158 404	159 201	39
40	160 000	160 801	161 604	162 409	163 216	164 025	164 836	165 649	166 464	167 281	40
41	168 100	168 921	169 744	170 569	171 396	172 225	173 056	173 889	174 724	175 561	41
42	176 400	177 241	178 084	178 929	179 776	180 625	181 476	182 329	183 184	184 041	42
43	184 900	185 761	186 624	187 489	188 356	189 225	190 096	190 969	191 844	192 721	43
44	193 600	194 481	195 364	196 249	197 136	198 025	198 916	199 809	200 704	201 601	44
45	202 500	203 401	204 304	205 209	206 116	207 025	207 936	208 849	209 764	210 681	45
46	211 600	212 521	213 444	214 369	215 296	216 225	217 156	218 089	219 024	219 961	46
47	220 900	221 841	222 784	223 729	224 676	225 625	226 576	227 529	228 484	229 441	47
48	230 400	231 361	232 324	233 289	234 256	235 225	236 196	237 169	238 144	239 121	48
49	240 100	241 081	242 064	243 049	244 036	245 025	246 016	247 009	248 004	249 001	49
50	250 000	251 001	252 004	253 009	254 016	255 025	256 036	257 049	258 064	259 081	50
51	260 100	261 121	262 144	263 169	264 196	265 225	266 256	267 289	268 324	269 361	51
52	270 400	271 441	272 484	273 529	274 576	275 625	276 676	277 729	278 784	279 841	52
53	280 900	281 961	283 024	284 089	285 156	286 225	287 296	288 369	289 444	290 521	53
54	291 600	292 681	293 764	294 849	295 936	297 025	298 116	299 209	300 304	301 401	54

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
55	302 500	303 601	304 704	305 309	306 916	308 025	309 136	310 249	311 364	312 401	55
56	313 600	314 721	315 844	316 969	318 096	319 225	320 356	321 489	322 624	323 761	56
57	324 900	326 041	327 184	328 329	329 476	330 625	331 776	332 929	334 084	335 241	57
58	336 400	337 561	338 724	339 889	341 056	342 225	343 396	344 569	345 744	346 921	58
59	348 100	349 281	350 464	351 649	352 836	354 025	355 216	356 409	357 604	358 801	59
60	360 000	361 201	362 404	363 609	364 816	366 025	367 236	368 449	369 664	370 881	60
61	372 100	373 321	374 544	375 769	376 996	378 225	379 456	380 689	381 924	383 161	61
62	384 400	385 641	386 884	388 129	389 376	390 625	391 876	393 129	394 384	395 641	62
63	396 900	398 161	399 424	400 689	401 956	403 225	404 496	405 769	407 044	408 321	63
64	409 600	410 881	412 164	413 449	414 736	416 025	417 316	418 609	419 904	421 201	64
65	422 500	423 801	425 104	426 409	427 716	429 025	430 336	431 649	432 964	434 281	65
66	435 600	436 921	438 244	439 569	440 896	442 225	443 556	444 889	446 224	447 561	66
67	448 900	450 241	451 584	452 929	454 276	455 625	456 976	458 329	459 684	461 041	67
68	462 400	463 761	465 124	466 489	467 856	469 225	470 596	471 969	473 344	474 721	68
69	476 100	477 481	478 864	480 249	481 636	483 025	484 416	485 809	487 204	488 601	69
70	490 000	491 401	492 804	494 209	495 616	497 025	498 436	499 849	501 264	502 681	70
71	504 100	505 521	506 944	508 369	509 796	511 225	512 656	514 089	515 524	516 961	71
72	518 400	519 841	521 284	522 729	524 176	525 625	527 076	528 529	529 984	531 441	72
73	532 900	534 361	535 824	537 289	538 756	540 225	541 696	543 169	544 644	546 121	73
74	547 600	549 081	550 564	552 049	553 536	555 025	556 516	558 009	559 504	561 001	74
75	562 500	564 001	565 504	567 009	568 516	570 025	571 536	573 049	574 564	576 081	75
76	577 600	579 121	580 644	582 169	583 696	585 225	586 756	588 289	589 824	591 361	76
77	592 900	594 441	595 984	597 529	599 076	600 625	602 176	603 729	605 284	606 841	77
78	608 400	609 961	611 524	613 089	614 656	616 225	617 796	619 369	620 944	622 521	78
79	624 100	625 681	627 264	628 849	630 436	632 025	633 616	635 209	636 804	638 401	79
80	640 000	641 601	643 204	644 809	646 416	648 025	649 636	651 249	652 864	654 481	80
81	656 100	657 721	659 344	660 969	662 596	664 225	665 856	667 489	669 124	670 761	81
82	672 400	674 041	675 684	677 329	678 976	680 625	682 276	683 929	685 584	687 241	82
83	688 900	690 561	692 224	693 889	695 556	697 225	698 896	700 569	702 244	703 921	83
84	705 600	707 281	708 964	710 649	712 336	714 025	715 716	717 409	719 104	720 801	84
85	722 500	724 201	725 904	727 609	729 316	731 025	732 736	734 449	736 164	737 881	85
86	739 600	741 321	743 044	744 769	746 496	748 225	749 956	751 689	753 424	755 161	86
87	756 900	758 641	760 384	762 129	763 876	765 625	767 376	769 129	770 884	772 641	87
88	774 400	776 161	777 924	779 689	781 456	783 225	784 996	786 769	788 544	790 321	88
89	792 100	793 881	795 664	797 449	799 236	801 025	802 816	804 609	806 404	808 201	89
90	810 000	811 801	813 604	815 409	817 216	819 025	820 836	822 649	824 464	826 281	90
91	828 100	829 921	831 744	833 569	835 396	837 225	839 056	840 889	842 724	844 561	91
92	846 400	848 241	850 084	851 929	853 776	855 625	857 476	859 329	861 184	863 041	92
93	864 900	866 761	868 624	870 489	872 356	874 225	876 096	877 969	879 844	881 721	93
94	883 600	885 481	887 364	889 249	891 136	893 025	894 916	896 809	898 704	900 601	94
95	902 500	904 401	906 304	908 209	910 116	912 025	913 936	915 849	917 764	919 681	95
96	921 600	923 521	925 444	927 369	929 296	931 225	933 156	935 089	937 024	938 961	96
97	940 900	942 841	944 784	946 729	948 676	950 625	952 576	954 529	956 484	958 441	97
98	960 400	962 361	964 324	966 289	968 256	970 225	972 196	974 169	976 144	978 121	98
99	980 100	982 081	984 064	986 049	988 036	990 025	992 016	994 009	996 004	998 001	99

35. 开 方 表

\sqrt{n} 和 $\sqrt{10n}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
10	10.000	10.050	10.100	10.149	10.198	10.247	10.296	10.344	10.392	10.440	10
	31.623	31.780	31.937	32.094	32.249	32.404	32.558	32.711	32.863	33.015	
11	10.488	10.536	10.583	10.630	10.677	10.724	10.770	10.817	10.863	10.909	11
	33.166	33.317	33.466	33.615	33.764	33.912	34.059	34.205	34.351	34.496	
12	10.954	11.000	11.045	11.091	11.136	11.180	11.225	11.269	11.314	11.358	12
	34.641	34.785	34.928	35.071	35.214	35.355	35.496	35.637	35.777	35.917	
13	11.402	11.446	11.489	11.533	11.576	11.619	11.662	11.705	11.747	11.790	13
	36.056	36.194	36.332	36.469	36.606	36.742	36.878	37.014	37.148	37.283	
14	11.832	11.874	11.916	11.958	12.000	12.042	12.083	12.124	12.166	12.207	14
	37.417	37.550	37.683	37.815	37.947	38.079	38.210	38.341	38.471	38.601	
15	12.247	12.288	12.329	12.369	12.410	12.450	12.490	12.530	12.570	12.610	15
	38.730	38.859	38.987	39.115	39.243	39.370	39.497	39.623	39.749	39.875	
16	12.649	12.689	12.728	12.767	12.806	12.845	12.884	12.923	12.961	13.000	16
	40.000	40.125	40.249	40.373	40.497	40.620	40.743	40.866	40.988	41.110	
17	13.038	13.077	13.115	13.153	13.191	13.229	13.266	13.304	13.342	13.379	17
	41.231	41.352	41.473	41.593	41.713	41.833	41.952	42.071	42.190	42.308	
18	13.416	13.454	13.491	13.528	13.565	13.601	13.638	13.675	13.711	13.748	18
	42.426	42.544	42.661	42.778	42.895	43.012	43.128	43.243	43.359	43.474	
19	13.734	13.820	13.856	13.892	13.928	13.964	14.000	14.036	14.071	14.107	19
	43.589	43.704	43.818	43.932	44.045	44.159	44.272	44.385	44.497	44.609	
20	14.142	14.177	14.213	14.248	14.283	14.318	14.353	14.387	14.422	14.457	20
	44.721	44.833	44.944	45.056	45.166	45.277	45.387	45.497	45.607	45.717	
21	14.491	14.526	14.560	14.595	14.629	14.663	14.697	14.731	14.765	14.799	21
	45.826	45.935	46.043	46.152	46.260	46.368	46.476	46.583	46.690	46.797	
22	14.832	14.866	14.900	14.933	14.967	15.000	15.033	15.067	15.100	15.133	22
	46.904	47.011	47.117	47.223	47.329	47.434	47.539	47.645	47.749	47.854	
23	15.166	15.199	15.232	15.264	15.297	15.330	15.362	15.395	15.427	15.460	23
	47.953	48.062	48.166	48.270	48.374	48.477	48.580	48.683	48.785	48.888	
24	15.492	15.524	15.556	15.588	15.620	15.652	15.684	15.716	15.748	15.780	24
	48.990	49.092	49.193	49.295	49.396	49.497	49.598	49.699	49.800	49.900	
25	15.811	15.843	15.875	15.906	15.937	15.969	16.000	16.031	16.062	16.093	25
	50.000	50.100	50.200	50.299	50.398	50.498	50.596	50.695	50.794	50.892	
26	16.125	16.155	16.186	16.217	16.248	16.279	16.310	16.340	16.371	16.401	26
	50.990	51.083	51.186	51.284	51.381	51.478	51.575	51.672	51.769	51.865	
27	16.432	16.462	16.492	16.523	16.553	16.583	16.613	16.643	16.673	16.703	27
	51.962	52.058	52.154	52.249	52.345	52.440	52.536	52.631	52.726	52.820	
28	16.733	16.763	16.793	16.823	16.852	16.882	16.912	16.941	16.971	17.000	28
	52.915	53.009	53.104	53.198	53.292	53.385	53.479	53.572	53.666	53.759	
29	17.029	17.059	17.088	17.117	17.146	17.176	17.205	17.234	17.263	17.292	29
	53.852	53.944	54.037	54.129	54.222	54.314	54.406	54.498	54.589	54.681	
30	17.321	17.349	17.378	17.407	17.436	17.464	17.493	17.521	17.550	17.578	30
	54.772	54.863	54.955	55.045	55.136	55.227	55.317	55.408	55.498	55.588	
31	17.607	17.635	17.664	17.692	17.720	17.748	17.776	17.804	17.833	17.861	31
	55.673	55.767	55.857	55.946	56.036	56.125	56.214	56.303	56.391	56.480	

[注] 上行为 \sqrt{n} ，下行为 $\sqrt{10n}$ 。

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>n</i>
32	17.839 56.569	17.916 56.657	17.944 56.745	17.972 56.833	18.000 56.921	18.028 57.009	18.055 57.096	18.083 57.184	18.111 57.271	18.138 57.359	32
33	18.166 57.446	18.193 57.523	18.221 57.619	18.248 57.706	18.276 57.793	18.303 57.879	18.330 57.966	18.358 58.052	18.385 58.133	18.412 58.224	33
34	18.439 58.310	18.466 58.395	18.493 58.481	18.520 58.566	18.547 58.652	18.574 58.737	18.601 58.822	18.628 58.907	18.655 58.992	18.682 59.076	34
35	18.703 59.161	18.735 59.245	18.762 59.330	18.788 59.414	18.815 59.498	18.841 59.582	18.868 59.666	18.894 59.749	18.921 59.833	18.947 59.917	35
36	18.974 60.000	19.000 60.023	19.026 60.166	19.053 60.249	19.079 60.332	19.105 60.415	19.131 60.493	19.157 60.581	19.183 60.663	19.209 60.745	36
37	19.235 60.823	19.261 60.910	19.237 60.992	19.313 61.074	19.339 61.156	19.365 61.237	19.391 61.319	19.416 61.400	19.442 61.482	19.468 61.563	37
38	19.494 61.644	19.519 61.725	19.545 61.806	19.570 61.887	19.596 61.963	19.621 62.048	19.647 62.129	19.672 62.209	19.698 62.290	19.723 62.370	38
39	19.748 62.450	19.774 62.530	19.799 62.610	19.824 62.690	19.849 62.769	19.875 62.849	19.900 62.929	19.925 63.008	19.950 63.087	19.975 63.166	39
40	20.000 63.246	20.025 63.325	20.050 63.403	20.075 63.482	20.100 63.561	20.125 63.640	20.149 63.718	20.174 63.797	20.199 63.875	20.224 63.953	40
41	20.243 64.031	20.273 64.109	20.298 64.187	20.322 64.265	20.347 64.343	20.372 64.420	20.396 64.498	20.421 64.576	20.445 64.653	20.469 64.730	41
42	20.494 64.807	20.518 64.885	20.543 64.962	20.567 65.033	20.591 65.115	20.616 65.192	20.640 65.269	20.664 65.345	20.688 65.422	20.712 65.493	42
43	20.736 65.574	20.761 65.651	20.785 65.727	20.809 65.802	20.833 65.879	20.857 65.955	20.881 66.030	20.905 66.106	20.928 66.182	20.952 66.257	43
44	20.976 66.332	21.000 66.403	21.024 66.433	21.048 66.558	21.071 66.633	21.095 66.708	21.119 66.783	21.142 66.858	21.166 66.933	21.190 67.007	44
45	21.213 67.032	21.237 67.157	21.260 67.231	21.284 67.305	21.307 67.380	21.331 67.454	21.354 67.528	21.378 67.602	21.401 67.676	21.424 67.750	45
46	21.443 67.823	21.471 67.897	21.494 67.971	21.517 68.044	21.541 68.118	21.564 68.191	21.587 68.264	21.610 68.337	21.633 68.411	21.656 68.484	46
47	21.679 68.557	21.703 68.629	21.726 68.702	21.749 68.775	21.772 68.848	21.794 68.920	21.817 68.993	21.840 69.065	21.863 69.138	21.886 69.210	47
48	21.909 69.232	21.932 69.354	21.954 69.426	21.977 69.498	22.000 69.570	22.023 69.642	22.045 69.714	22.068 69.785	22.091 69.857	22.113 69.929	48
49	22.136 70.000	22.159 70.071	22.181 70.143	22.204 70.214	22.226 70.285	22.249 70.356	22.271 70.427	22.293 70.498	22.316 70.569	22.338 70.640	49
50	22.361 70.711	22.383 70.781	22.405 70.852	22.428 70.922	22.450 70.993	22.472 71.063	22.494 71.134	22.517 71.204	22.539 71.274	22.561 71.344	50
51	22.583 71.414	22.605 71.484	22.627 71.554	22.650 71.624	22.672 71.694	22.694 71.764	22.716 71.833	22.738 71.903	22.760 71.972	22.782 72.042	51
52	22.804 72.111	22.825 72.180	22.847 72.250	22.869 72.319	22.891 72.388	22.913 72.457	22.935 72.526	22.956 72.595	22.978 72.664	23.000 72.732	52
53	23.022 72.801	23.043 72.870	23.065 72.938	23.087 73.007	23.108 73.075	23.130 73.144	23.152 73.212	23.173 73.280	23.195 73.348	23.216 73.417	53

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
64	23.238 73.485	23.259 73.553	23.281 73.621	23.302 73.689	23.324 73.756	23.345 73.824	23.367 73.892	23.388 73.959	23.409 74.027	23.431 74.095	64
55	23.452 74.162	23.473 74.229	23.495 74.297	23.516 74.364	23.537 74.431	23.558 74.498	23.530 74.565	23.601 74.632	23.622 74.699	23.643 74.766	55
66	23.664 74.833	23.685 74.900	23.707 74.967	23.728 75.033	23.749 75.100	23.770 75.166	23.791 75.233	23.812 75.299	23.833 75.366	23.854 75.432	66
57	23.875 75.498	23.896 75.565	23.917 75.631	23.937 75.697	23.958 75.763	23.979 75.829	24.000 75.895	24.021 75.961	24.042 76.026	24.062 76.092	57
58	24.033 76.158	24.104 76.223	24.125 76.289	24.145 76.354	24.166 76.420	24.187 76.485	24.207 76.551	24.228 76.616	24.249 76.681	24.269 76.746	58
59	24.290 76.811	24.310 76.877	24.331 76.942	24.352 77.006	24.372 77.071	24.393 77.136	24.413 77.201	24.434 77.266	24.454 77.330	24.474 77.395	59
60	24.495 77.460	24.515 77.524	24.536 77.589	24.556 77.653	24.576 77.717	24.597 77.782	24.617 77.846	24.637 77.910	24.658 77.974	24.678 78.038	60
61	24.698 78.102	24.718 78.166	24.739 78.230	24.759 78.294	24.779 78.358	24.799 78.422	24.819 78.486	24.839 78.549	24.860 78.613	24.880 78.677	61
62	24.900 78.740	24.920 78.804	24.940 78.867	24.960 78.930	24.980 78.994	25.000 79.057	25.020 79.120	25.040 79.183	25.060 79.246	25.080 79.310	62
63	25.100 79.373	25.120 79.436	25.140 79.498	25.159 79.561	25.179 79.624	25.199 79.687	25.219 79.750	25.239 79.812	25.259 79.875	25.278 79.937	63
64	25.298 80.000	25.318 80.062	25.338 80.125	25.357 80.187	25.377 80.250	25.397 80.312	25.417 80.374	25.436 80.436	25.456 80.498	25.475 80.561	64
65	25.495 80.623	25.515 80.685	25.534 80.747	25.554 80.808	25.573 80.870	25.593 80.932	25.612 80.994	25.632 81.056	25.652 81.117	25.671 81.179	65
66	25.690 81.240	25.710 81.302	25.729 81.363	25.749 81.425	25.768 81.486	25.788 81.548	25.807 81.609	25.826 81.670	25.846 81.731	25.865 81.792	66
67	25.884 81.854	25.904 81.915	25.923 81.976	25.942 82.037	25.962 82.098	25.981 82.158	26.000 82.219	26.019 82.280	26.038 82.341	26.058 82.401	67
68	26.077 82.462	26.096 82.523	26.115 82.583	26.134 82.644	26.153 82.704	26.173 82.765	26.192 82.825	26.211 82.885	26.230 82.946	26.249 83.006	68
69	26.268 83.066	26.287 83.126	26.306 83.187	26.325 83.247	26.344 83.307	26.363 83.367	26.382 83.427	26.401 83.487	26.420 83.546	26.439 83.606	69
70	26.458 83.666	26.476 83.726	26.495 83.785	26.514 83.845	26.533 83.905	26.552 83.964	26.571 84.024	26.589 84.083	26.608 84.143	26.627 84.202	70
71	26.646 84.261	26.665 84.321	26.683 84.380	26.702 84.439	26.721 84.499	26.739 84.558	26.758 84.617	26.777 84.676	26.796 84.735	26.814 84.794	71
72	26.833 84.853	26.851 84.912	26.870 84.971	26.889 85.029	26.907 85.088	26.926 85.147	26.944 85.206	26.963 85.264	26.981 85.323	27.000 85.381	72
73	27.019 85.440	27.037 85.499	27.055 85.557	27.074 85.615	27.092 85.674	27.111 85.732	27.129 85.790	27.148 85.849	27.166 85.907	27.185 85.965	73
74	27.203 86.023	27.221 86.081	27.240 86.139	27.258 86.197	27.276 86.255	27.295 86.313	27.313 86.371	27.331 86.429	27.350 86.487	27.368 86.545	74
75	27.386 86.603	27.404 86.660	27.423 86.718	27.441 86.776	27.459 86.833	27.477 86.891	27.495 86.948	27.514 87.006	27.532 87.063	27.550 87.121	75
76	27.568 87.178	27.586 87.235	27.604 87.293	27.622 87.350	27.641 87.407	27.659 87.464	27.677 87.521	27.695 87.579	27.713 87.636	27.731 87.693	76

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
77	27.749 87.750	27.767 87.807	27.785 87.864	27.803 87.920	27.821 87.977	27.839 88.034	27.857 88.091	27.875 88.148	27.893 88.204	27.911 88.261	77
78	27.928 88.318	27.946 88.374	27.964 88.431	27.982 88.487	28.000 88.544	28.018 88.600	28.036 88.657	28.054 88.713	28.071 88.769	28.089 88.826	78
79	28.107 88.832	28.125 88.938	28.142 88.994	28.160 89.051	28.178 89.107	28.196 89.163	28.213 89.219	28.231 89.275	28.249 89.331	28.267 89.387	79
80	28.284 89.443	28.302 89.499	28.320 89.554	28.337 89.610	28.355 89.666	28.373 89.722	28.390 89.778	28.408 89.833	28.425 89.889	28.443 89.944	80
81	28.460 90.000	28.478 90.056	28.496 90.111	28.513 90.167	28.531 90.222	28.548 90.277	28.566 90.333	28.583 90.388	28.601 90.443	28.618 90.499	81
82	28.636 90.554	28.653 90.609	28.671 90.664	28.688 90.719	28.705 90.774	28.723 90.830	28.740 90.885	28.758 90.940	28.775 90.995	28.792 91.049	82
83	28.810 91.104	28.827 91.159	28.844 91.214	28.862 91.269	28.879 91.324	28.896 91.378	28.914 91.433	28.931 91.488	28.948 91.542	28.965 91.597	83
84	28.933 91.652	29.000 91.706	29.017 91.761	29.034 91.815	29.052 91.869	29.069 91.924	29.086 91.978	29.103 92.033	29.120 92.087	29.133 92.141	84
85	29.155 92.195	29.172 92.250	29.189 92.304	29.206 92.358	29.223 92.412	29.240 92.466	29.257 92.520	29.275 92.574	29.292 92.628	29.309 92.682	85
86	29.326 92.736	29.343 92.790	29.360 92.844	29.377 92.898	29.394 92.952	29.411 93.005	29.428 93.059	29.445 93.113	29.462 93.167	29.479 93.220	86
87	29.496 93.274	29.513 93.327	29.530 93.381	29.547 93.434	29.563 93.488	29.580 93.541	29.597 93.595	29.614 93.648	29.631 93.702	29.648 93.755	87
88	29.665 93.803	29.682 93.862	29.698 93.915	29.715 93.968	29.732 94.021	29.749 94.074	29.766 94.128	29.783 94.181	29.799 94.234	29.816 94.287	88
89	29.833 94.340	29.850 94.393	29.866 94.446	29.883 94.499	29.900 94.552	29.917 94.604	29.933 94.657	29.950 94.710	29.967 94.763	29.983 94.816	89
90	30.000 94.868	30.017 94.921	30.033 94.974	30.050 95.028	30.067 95.079	30.083 95.131	30.100 95.184	30.116 95.237	30.133 95.289	30.150 95.341	90
91	30.166 95.394	30.183 95.446	30.199 95.499	30.216 95.551	30.232 95.603	30.249 95.656	30.265 95.708	30.282 95.760	30.299 95.812	30.315 95.864	91
92	30.332 95.917	30.348 95.969	30.364 96.021	30.381 96.073	30.397 96.125	30.414 96.177	30.430 96.229	30.447 96.281	30.463 96.333	30.480 96.385	92
93	30.496 96.437	30.512 96.488	30.529 96.540	30.545 96.592	30.561 96.644	30.578 96.695	30.594 96.747	30.610 96.799	30.627 96.850	30.643 96.902	93
94	30.659 96.954	30.676 97.005	30.692 97.057	30.708 97.108	30.725 97.160	30.741 97.211	30.757 97.263	30.773 97.314	30.790 97.365	30.806 97.417	94
95	30.822 97.468	30.838 97.519	30.854 97.570	30.871 97.622	30.887 97.673	30.903 97.724	30.919 97.775	30.935 97.826	30.952 97.877	30.968 97.929	95
96	30.984 97.980	31.000 98.031	31.016 98.082	31.032 98.133	31.048 98.184	31.064 98.234	31.081 98.285	31.097 98.336	31.113 98.387	31.129 98.438	96
97	31.145 98.489	31.161 98.539	31.177 98.590	31.193 98.641	31.209 98.691	31.225 98.742	31.241 98.793	31.257 98.843	31.273 98.894	31.289 98.944	97
98	31.305 98.995	31.321 99.045	31.337 99.096	31.353 99.146	31.369 99.197	31.385 99.247	31.401 99.298	31.417 99.348	31.432 99.399	31.448 99.448	98
99	31.464 99.499	31.480 99.549	31.496 99.599	31.512 99.649	31.528 99.700	31.544 99.750	31.559 99.800	31.575 99.850	31.591 99.900	31.607 99.950	99

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x
5.5	0.181 818	0.181 438	0.181 159	0.180 832	0.180 505	0.180 180	0.179 856	0.179 533	0.179 211	0.178 891	5.5
5.6	.178 571	.178 253	.177 936	.177 620	.177 305	.176 991	.176 678	.176 367	.176 056	.175 747	5.6
5.7	.175 439	.175 131	.174 825	.174 520	.174 216	.173 913	.173 611	.173 310	.173 010	.172 712	5.7
5.8	.172 414	.172 117	.171 821	.171 527	.171 233	.170 940	.170 648	.170 358	.170 068	.169 779	5.8
5.9	.169 492	.169 205	.168 919	.168 634	.168 350	.168 067	.167 785	.167 504	.167 224	.166 945	5.9
6.0	.166 667	.166 389	.166 113	.165 837	.165 563	.165 289	.165 017	.164 745	.164 474	.164 204	6.0
6.1	.163 934	.163 666	.163 399	.163 132	.162 866	.162 602	.162 338	.162 075	.161 812	.161 551	6.1
6.2	.161 290	.161 031	.160 772	.160 514	.160 256	.160 000	.159 744	.159 490	.159 236	.158 983	6.2
6.3	.158 730	.158 479	.158 228	.157 973	.157 729	.157 480	.157 233	.156 986	.156 740	.156 495	6.3
6.4	.156 250	.156 006	.155 763	.155 521	.155 280	.155 039	.154 799	.154 560	.154 321	.154 083	6.4
6.5	.153 846	.153 610	.153 374	.153 139	.152 905	.152 672	.152 439	.152 207	.151 976	.151 745	6.5
6.6	.151 515	.151 286	.151 057	.150 830	.150 602	.150 376	.150 150	.149 925	.149 701	.149 477	6.6
6.7	.149 254	.149 031	.148 810	.148 588	.148 368	.148 148	.147 929	.147 710	.147 493	.147 275	6.7
6.8	.147 059	.146 843	.146 628	.146 413	.146 199	.145 985	.145 773	.145 560	.145 349	.145 138	6.8
6.9	.144 928	.144 718	.144 509	.144 300	.144 092	.143 885	.143 678	.143 472	.143 266	.143 062	6.9
7.0	.142 857	.142 659	.142 450	.142 248	.142 045	.141 844	.141 643	.141 443	.141 243	.141 044	7.0
7.1	.140 845	.140 647	.140 449	.140 252	.140 056	.139 860	.139 665	.139 470	.139 276	.139 082	7.1
7.2	.138 839	.138 696	.138 504	.138 313	.138 122	.137 931	.137 741	.137 552	.137 363	.137 174	7.2
7.3	.136 986	.136 799	.136 612	.136 426	.136 240	.136 054	.135 870	.135 685	.135 501	.135 318	7.3
7.4	.135 135	.134 959	.134 771	.134 590	.134 409	.134 228	.134 048	.133 869	.133 690	.133 511	7.4
7.5	.133 333	.133 156	.132 979	.132 802	.132 626	.132 450	.132 275	.132 100	.131 926	.131 752	7.5
7.6	.131 579	.131 406	.131 234	.131 062	.130 890	.130 719	.130 548	.130 378	.130 208	.130 039	7.6
7.7	.129 370	.129 202	.129 034	.128 866	.128 699	.128 532	.128 366	.128 200	.128 035	.127 870	7.7
7.8	.128 205	.128 041	.127 877	.127 714	.127 551	.127 389	.127 226	.127 065	.126 904	.126 743	7.8
7.9	.126 582	.126 422	.126 263	.126 103	.125 945	.125 786	.125 628	.125 471	.125 313	.125 156	7.9
8.0	.125 000	.124 844	.124 688	.124 533	.124 378	.124 224	.124 069	.123 916	.123 762	.123 609	8.0
8.1	.123 457	.123 305	.123 153	.123 001	.122 850	.122 699	.122 549	.122 399	.122 249	.122 100	8.1
8.2	.121 951	.121 803	.121 655	.121 507	.121 359	.121 212	.121 065	.120 919	.120 773	.120 627	8.2
8.3	.120 432	.120 337	.120 192	.120 048	.119 904	.119 760	.119 617	.119 474	.119 332	.119 190	8.3
8.4	.119 048	.118 906	.118 765	.118 624	.118 483	.118 343	.118 203	.118 064	.117 925	.117 786	8.4
8.5	.117 647	.117 509	.117 371	.117 233	.117 096	.116 959	.116 822	.116 686	.116 550	.116 414	8.5
8.6	.116 279	.116 144	.116 009	.115 875	.115 741	.115 607	.115 473	.115 340	.115 207	.115 075	8.6
8.7	.114 943	.114 811	.114 679	.114 548	.114 416	.114 286	.114 155	.114 025	.113 895	.113 766	8.7
8.8	.113 636	.113 507	.113 379	.113 250	.113 122	.112 994	.112 867	.112 740	.112 613	.112 486	8.8
8.9	.112 360	.112 233	.112 108	.111 982	.111 857	.111 732	.111 607	.111 483	.111 359	.111 235	8.9
9.0	.111 111	.110 988	.110 865	.110 742	.110 619	.110 497	.110 375	.110 254	.110 132	.110 011	9.0
9.1	.109 890	.109 769	.109 649	.109 529	.109 409	.109 290	.109 170	.109 051	.108 932	.108 814	9.1
9.2	.108 696	.108 578	.108 460	.108 342	.108 225	.108 108	.107 991	.107 875	.107 759	.107 643	9.2
9.3	.107 527	.107 411	.107 296	.107 181	.107 066	.106 952	.106 838	.106 724	.106 610	.106 496	9.3
9.4	.106 383	.106 270	.106 157	.106 045	.105 932	.105 820	.105 708	.105 597	.105 485	.105 374	9.4
9.5	.105 263	.105 152	.105 042	.104 932	.104 822	.104 712	.104 603	.104 493	.104 384	.104 275	9.5
9.6	.104 167	.104 058	.103 950	.103 842	.103 734	.103 627	.103 520	.103 413	.103 306	.103 199	9.6
9.7	.103 093	.102 987	.102 881	.102 775	.102 669	.102 564	.102 459	.102 354	.102 249	.102 145	9.7
9.8	.102 041	.101 937	.101 833	.101 729	.101 626	.101 523	.101 420	.101 317	.101 215	.101 112	9.8
9.9	.101 010	.100 908	.100 806	.100 705	.100 604	.100 503	.100 402	.100 301	.100 200	.100 100	9.9

37. 常用对数表

$\log n$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
10	000 00	004 32	008 60	012 84	017 08	021 19	025 31	029 38	033 42	037 43	10
11	041 39	045 32	049 22	053 08	056 90	060 70	064 46	068 19	071 88	075 55	11
12	079 18	082 79	086 36	089 91	093 42	096 91	100 37	103 80	107 21	110 59	12
13	113 94	117 27	120 57	123 85	127 10	130 33	133 54	136 72	139 88	143 01	13
14	146 13	149 22	152 29	155 34	158 36	161 37	164 35	167 32	170 26	173 19	14
15	176 09	178 98	181 84	184 69	187 52	190 33	193 12	195 90	198 66	201 40	15
16	204 12	206 83	209 52	212 19	214 84	217 48	220 11	222 72	225 31	227 89	16
17	230 45	233 00	235 53	238 05	240 55	243 04	245 51	247 97	250 42	252 85	17
18	255 27	257 68	260 07	262 45	264 82	267 17	269 51	271 84	274 16	276 46	18
19	278 75	281 03	283 30	285 56	287 80	290 03	292 26	294 47	296 67	298 85	19
20	301 03	303 20	305 35	307 50	309 63	311 75	313 87	315 97	318 06	320 15	20
21	322 22	324 28	326 34	328 38	330 41	332 44	334 45	336 46	338 46	340 44	21
22	342 42	344 39	346 35	348 30	350 25	352 18	354 11	356 03	357 93	359 84	22
23	361 73	363 61	365 49	367 36	369 22	371 07	372 91	374 75	376 58	378 40	23
24	380 21	382 02	383 82	385 61	387 39	389 17	390 94	392 70	394 45	396 20	24
25	397 94	399 67	401 40	403 12	404 83	406 54	408 24	409 93	411 62	413 30	25
26	414 97	416 64	418 30	419 96	421 60	423 25	424 88	426 51	428 13	429 75	26
27	431 36	432 97	434 57	436 16	437 75	439 33	440 91	442 48	444 04	445 60	27
28	447 16	448 71	450 25	451 79	453 32	454 84	456 37	457 88	459 39	460 90	28
29	462 40	463 89	465 38	466 87	468 35	469 82	471 29	472 76	474 22	475 67	29
30	477 12	478 57	480 01	481 44	482 87	484 30	485 72	487 14	488 55	489 96	30
31	491 36	492 76	494 15	495 54	496 93	498 31	499 69	501 06	502 43	503 79	31
32	505 15	506 51	507 86	509 20	510 55	511 88	513 22	514 55	515 87	517 20	32
33	518 51	519 83	521 14	522 44	523 75	525 04	526 34	527 63	528 92	530 20	33
34	531 48	532 75	534 03	535 29	536 56	537 82	539 08	540 33	541 58	542 83	34
35	544 07	545 31	546 54	547 77	549 00	550 23	551 45	552 67	553 88	555 09	35
36	556 30	557 51	558 71	559 91	561 10	562 29	563 48	564 67	565 85	567 03	36
37	568 20	569 37	570 54	571 71	572 87	574 03	575 19	576 34	577 49	578 64	37
38	579 78	580 92	582 06	583 20	584 33	585 46	586 59	587 71	588 83	589 95	38
39	591 06	592 18	593 29	594 39	595 50	596 60	597 70	598 79	599 88	600 97	39
40	602 06	603 14	604 23	605 31	606 38	607 46	608 53	609 59	610 66	611 72	40
41	612 78	613 84	614 90	615 95	617 00	618 05	619 09	620 14	621 18	622 21	41
42	623 25	624 28	625 31	626 34	627 37	628 39	629 41	630 43	631 44	632 46	42
43	633 47	634 48	635 48	636 49	637 49	638 49	639 49	640 48	641 47	642 46	43
44	643 45	644 44	645 42	646 40	647 38	648 36	649 33	650 31	651 28	652 25	44
45	653 21	654 18	655 14	656 10	657 06	658 01	658 96	659 92	660 87	661 81	45
46	662 76	663 70	664 64	665 58	666 52	667 45	668 39	669 32	670 25	671 17	46
47	672 10	673 02	673 94	674 86	675 78	676 69	677 61	678 52	679 43	680 34	47
48	681 24	682 15	683 05	683 95	684 85	685 74	686 64	687 53	688 42	689 31	48
49	690 20	691 08	691 97	692 85	693 73	694 61	695 48	696 36	697 23	698 10	49
50	698 97	699 84	700 70	701 57	702 43	703 29	704 15	705 01	705 86	706 72	50
51	707 57	708 42	709 27	710 12	710 96	711 81	712 65	713 49	714 33	715 17	51
52	716 00	716 84	717 67	718 50	719 33	720 16	720 99	721 81	722 63	723 46	52
53	724 23	725 09	725 91	726 73	727 54	728 35	729 16	729 97	730 78	731 59	53
54	732 39	733 20	734 00	734 80	735 60	736 40	737 19	737 99	738 78	739 57	54

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>n</i>
55	740 36	741 15	741 94	742 73	743 51	744 29	745 07	745 86	746 63	747 41	55
56	748 19	748 96	749 74	750 51	751 28	752 05	752 82	753 58	754 35	755 11	56
57	755 87	756 64	757 40	758 15	758 91	759 67	760 42	761 18	761 93	762 68	57
58	763 43	764 18	764 92	765 67	766 41	767 16	767 90	768 64	769 38	770 12	58
59	770 85	771 59	772 32	773 05	773 79	774 52	775 25	775 97	776 70	777 43	59
60	778 15	778 87	779 60	780 32	781 04	781 76	782 47	783 19	783 90	784 62	60
61	785 33	786 04	786 75	787 46	788 17	788 88	789 58	790 29	790 99	791 69	61
62	792 39	793 09	793 79	794 49	795 18	795 88	796 57	797 27	797 96	798 65	62
63	799 34	800 03	800 72	801 40	802 09	802 77	803 46	804 14	804 82	805 50	63
64	806 18	806 86	807 54	808 21	808 89	809 56	810 23	810 90	811 58	812 24	64
65	812 91	813 58	814 25	814 91	815 58	816 24	816 90	817 57	818 23	818 89	65
66	819 54	820 20	820 86	821 51	822 17	822 82	823 47	824 13	824 78	825 43	66
67	826 07	826 72	827 37	828 02	828 66	829 30	829 95	830 59	831 23	831 87	67
68	832 51	833 15	833 78	834 42	835 06	835 69	836 32	836 96	837 59	838 22	68
69	838 85	839 48	840 11	840 73	841 36	841 98	842 61	843 23	843 86	844 48	69
70	845 10	845 72	846 34	846 96	847 57	848 19	848 80	849 42	850 03	850 65	70
71	851 26	851 87	852 48	853 09	853 70	854 31	854 91	855 52	856 12	856 73	71
72	857 33	857 94	858 54	859 14	859 74	860 34	860 94	861 53	862 13	862 73	72
73	863 32	863 92	864 51	865 10	865 70	866 29	866 88	867 47	868 06	868 64	73
74	869 23	869 82	870 40	870 99	871 57	872 16	872 74	873 32	873 90	874 48	74
75	875 06	875 64	876 22	876 79	877 37	877 95	878 52	879 10	879 67	880 24	75
76	880 81	881 38	881 95	882 52	883 09	883 66	884 23	884 80	885 36	885 93	76
77	886 49	887 05	887 62	888 18	888 74	889 30	889 86	890 42	890 98	891 54	77
78	892 09	892 65	893 21	893 76	894 32	894 87	895 42	895 97	896 53	897 08	78
79	897 63	898 18	898 73	899 27	899 82	900 37	900 91	901 46	902 00	902 55	79
80	903 09	903 63	904 17	904 72	905 26	905 80	906 34	906 87	907 41	907 95	80
81	908 49	909 02	909 56	910 09	910 62	911 16	911 69	912 22	912 75	913 28	81
82	913 81	914 34	914 87	915 40	915 93	916 45	916 98	917 51	918 03	918 55	82
83	919 08	919 60	920 12	920 65	921 17	921 69	922 21	922 73	923 24	923 76	83
84	924 28	924 80	925 31	925 83	926 34	926 86	927 37	927 88	928 40	928 91	84
85	929 42	929 93	930 44	930 95	931 46	931 97	932 47	932 98	933 49	933 99	85
86	934 50	935 00	935 51	936 01	936 51	937 02	937 52	938 02	938 52	939 02	86
87	939 52	940 02	940 52	941 01	941 51	942 01	942 50	943 00	943 49	943 99	87
88	944 48	944 98	945 47	945 96	946 45	946 94	947 43	947 92	948 41	948 90	88
89	949 39	949 88	950 36	950 85	951 34	951 82	952 31	952 79	953 28	953 76	89
90	954 24	954 72	955 21	955 69	956 17	956 65	957 13	957 61	958 09	958 56	90
91	959 04	959 52	959 99	960 47	960 95	961 42	961 90	962 37	962 84	963 32	91
92	963 79	964 26	964 73	965 20	965 67	966 14	966 61	967 08	967 55	968 02	92
93	968 48	968 95	969 42	969 88	970 35	970 81	971 28	971 74	972 20	972 67	93
94	973 13	973 59	974 05	974 51	974 97	975 43	975 89	976 35	976 81	977 27	94
95	977 72	978 18	978 64	979 09	979 55	980 00	980 46	980 91	981 37	981 82	95
96	982 27	982 72	983 18	983 63	984 08	984 53	984 98	985 43	985 88	986 32	96
97	986 77	987 22	987 67	988 11	988 56	989 00	989 45	989 89	990 34	990 78	97
98	991 23	991 67	992 11	992 55	993 00	993 44	993 88	994 32	994 76	995 20	98
99	995 64	996 07	996 51	996 95	997 39	997 82	998 26	998 70	999 13	999 57	99

38. 自然对数表

ln *x*

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x
0.10	2.902 59	2.292 68	2.232 78	2.273 03	2.263 36	2.253 79	2.244 32	2.234 93	2.225 62	2.216 41	0.10
0.11	2.207 27	.198 23	.189 26	.180 37	.171 56	.162 82	.154 17	.145 58	.137 07	.128 63	0.11
0.12	2.120 26	.111 96	.103 73	.095 57	.087 47	.079 44	.071 47	.063 57	.055 73	.047 94	0.12
0.13	2.040 22	.092 56	.024 95	.017 41	.009 92	.002 43	1.995 10	1.987 77	1.980 50	1.973 28	0.13
0.14	1.966 11	1.959 00	1.951 93	1.944 91	1.937 94	1.931 02	.924 15	.917 32	.910 54	.903 81	0.14
0.15	1.897 12	.890 48	.883 87	.877 32	.870 80	.864 33	.857 90	.851 51	.845 16	.838 85	0.15
0.16	1.832 58	.826 35	.820 16	.814 01	.807 89	.801 81	.795 77	.789 76	.783 79	.777 86	0.16
0.17	1.771 96	.766 09	.760 26	.754 46	.748 70	.742 97	.737 27	.731 61	.725 97	.720 37	0.17
0.18	1.714 80	.709 26	.703 75	.698 27	.692 82	.687 40	.682 01	.676 65	.671 31	.666 01	0.18
0.19	1.660 73	.655 43	.650 26	.645 07	.639 90	.634 76	.629 64	.624 55	.619 49	.614 45	0.19
0.20	1.609 44	.604 45	.599 49	.594 55	.589 64	.584 75	.579 88	.575 04	.570 22	.565 42	0.20
0.21	1.560 65	.555 90	.551 17	.546 46	.541 78	.537 12	.532 48	.527 86	.523 26	.518 68	0.21
0.22	1.514 13	.509 59	.505 08	.500 58	.496 11	.491 65	.487 22	.482 81	.478 41	.474 03	0.22
0.23	1.469 68	.465 34	.461 02	.456 72	.452 43	.448 17	.443 92	.439 70	.435 48	.431 29	0.23
0.24	1.427 12	.422 96	.418 82	.414 69	.410 59	.406 50	.402 42	.398 37	.394 33	.390 30	0.24
0.25	1.386 29	.382 30	.378 33	.374 37	.370 42	.366 49	.362 58	.358 68	.354 80	.350 93	0.25
0.26	1.347 07	.343 23	.339 41	.335 60	.331 81	.328 03	.324 26	.320 51	.316 77	.313 04	0.26
0.27	1.309 33	.305 64	.301 95	.298 28	.294 63	.290 98	.287 35	.283 74	.280 13	.276 54	0.27
0.28	1.272 97	.269 40	.265 85	.262 31	.258 78	.255 27	.251 76	.248 27	.244 79	.241 33	0.28
0.29	1.237 87	.234 43	.231 00	.227 58	.224 18	.220 78	.217 40	.214 02	.210 66	.207 31	0.29
0.30	1.203 97	.200 65	.197 33	.194 02	.190 73	.187 44	.184 17	.180 91	.177 66	.174 41	0.30
0.31	1.171 18	.167 96	.164 75	.161 55	.158 36	.155 18	.152 01	.148 85	.145 70	.142 56	0.31
0.32	1.139 43	.136 31	.133 20	.130 10	.127 01	.123 93	.120 86	.117 80	.114 74	.111 70	0.32
0.33	1.108 66	.105 64	.102 62	.099 61	.096 61	.093 62	.090 64	.087 67	.084 71	.081 76	0.33
0.34	1.078 81	.075 87	.072 94	.070 02	.067 11	.064 21	.061 32	.058 43	.055 55	.052 63	0.34
0.35	1.049 82	.046 97	.044 12	.041 29	.038 46	.035 64	.032 82	.030 02	.027 22	.024 43	0.35
0.36	1.021 65	.018 88	.016 11	.013 35	.010 60	.007 86	.005 12	.002 39	0.999 67	0.996 93	0.36
0.37	0.994 25	0.991 55	0.988 86	0.986 18	0.983 50	0.980 83	0.978 17	0.975 51	.972 86	.970 22	0.37
0.38	0.967 53	.964 96	.962 33	.959 72	.957 11	.954 51	.951 92	.949 33	.946 75	.944 13	0.38
0.39	0.941 61	.939 05	.936 49	.933 95	.931 40	.928 87	.926 34	.923 82	.921 30	.918 79	0.39
0.40	0.916 29	.913 79	.911 30	.908 82	.906 34	.903 87	.901 40	.898 94	.896 49	.894 04	0.40
0.41	0.891 60	.889 16	.886 73	.884 31	.881 89	.879 48	.877 07	.874 67	.872 27	.869 83	0.41
0.42	0.867 50	.865 12	.862 75	.860 33	.858 02	.855 67	.853 32	.850 97	.848 63	.846 30	0.42
0.43	0.843 97	.841 65	.839 33	.837 02	.834 71	.832 41	.830 11	.827 82	.825 54	.823 26	0.43
0.44	0.820 93	.818 71	.816 45	.814 19	.811 93	.809 68	.807 44	.805 20	.802 96	.800 73	0.44
0.45	0.798 51	.796 29	.794 07	.791 86	.789 66	.787 46	.785 26	.783 07	.780 89	.778 71	0.45
0.46	0.776 53	.774 36	.772 19	.770 03	.767 87	.765 72	.763 57	.761 43	.759 29	.757 15	0.46
0.47	0.755 02	.752 90	.750 78	.748 66	.746 55	.744 44	.742 34	.740 24	.738 14	.736 05	0.47
0.48	0.733 97	.731 89	.729 81	.727 74	.725 67	.723 61	.721 55	.719 49	.717 44	.715 39	0.48
0.49	0.713 25	.711 31	.709 23	.707 25	.705 22	.703 20	.701 18	.699 17	.697 16	.695 15	0.49
0.50	0.693 15	.691 15	.689 16	.687 17	.685 18	.683 20	.681 22	.679 24	.677 27	.675 31	0.50
0.51	0.673 34	.671 39	.669 43	.667 48	.665 53	.663 59	.661 65	.659 71	.657 78	.655 85	0.51
0.52	0.653 93	.652 01	.650 09	.648 17	.646 26	.644 36	.642 45	.640 55	.638 66	.636 77	0.52
0.53	0.634 88	.632 99	.631 11	.629 23	.627 36	.625 49	.623 62	.621 76	.619 90	.618 04	0.53
0.54	0.616 19	.614 34	.612 49	.610 65	.608 81	.606 97	.605 14	.603 31	.601 48	.599 66	0.54

[注] 表内对数值皆取负值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
ln 10 ⁿ	2.30259	4.60517	6.90776	9.21034	11.51293	13.81551	16.11810	18.42068	20.72327	ln 10 ⁿ

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x
0.55	0.597 84	0.596 02	0.594 21	0.592 40	0.590 59	0.588 79	0.586 99	0.585 19	0.583 40	0.581 61	0.55
0.56	0.579 82	.578 03	.576 25	.574 48	.572 70	.570 93	.569 18	.567 40	.565 63	.563 87	0.56
0.57	0.562 12	.560 37	.558 62	.556 87	.555 13	.553 39	.551 65	.549 91	.548 18	.546 45	0.57
0.58	0.544 73	.543 00	.541 28	.539 57	.537 85	.536 14	.534 44	.532 73	.531 03	.529 33	0.58
0.59	0.527 63	.525 94	.524 25	.522 56	.520 88	.519 19	.517 51	.515 84	.514 16	.512 49	0.59
0.60	0.510 88	.509 16	.507 50	.505 84	.504 18	.502 53	.500 88	.499 23	.497 58	.495 94	0.60
0.61	0.494 30	.492 66	.491 02	.489 39	.487 76	.486 13	.484 51	.482 89	.481 27	.479 65	0.61
0.62	0.478 04	.476 42	.474 82	.473 21	.471 60	.470 00	.468 40	.466 81	.465 22	.463 62	0.62
0.63	0.462 04	.460 45	.458 87	.457 28	.455 71	.454 13	.452 56	.450 99	.449 42	.447 85	0.63
0.64	0.446 29	.444 73	.443 17	.441 61	.440 06	.438 50	.436 96	.435 41	.433 86	.432 32	0.64
0.65	0.430 78	.429 25	.427 71	.426 18	.424 65	.423 12	.421 59	.420 07	.418 55	.417 03	0.65
0.66	0.415 52	.414 00	.412 49	.410 98	.409 47	.407 97	.406 47	.404 97	.403 47	.401 97	0.66
0.67	0.400 48	.398 99	.397 50	.396 01	.394 53	.393 04	.391 56	.390 08	.388 61	.387 13	0.67
0.68	0.385 66	.384 19	.382 73	.381 26	.379 80	.378 34	.376 88	.375 42	.373 97	.372 51	0.68
0.69	0.371 06	.369 62	.368 17	.366 73	.365 28	.363 84	.362 41	.360 97	.359 54	.358 10	0.69
0.70	0.356 67	.355 25	.353 82	.352 40	.350 93	.349 56	.348 14	.346 72	.345 31	.343 90	0.70
0.71	0.342 49	.341 08	.339 68	.338 27	.336 87	.335 47	.334 08	.332 68	.331 29	.329 89	0.71
0.72	0.328 50	.327 12	.325 73	.324 35	.322 96	.321 58	.320 21	.318 83	.317 45	.316 08	0.72
0.73	0.314 71	.313 34	.311 97	.310 61	.309 25	.307 88	.306 53	.305 17	.303 81	.302 46	0.73
0.74	0.301 11	.299 75	.298 41	.297 06	.295 71	.294 37	.293 03	.291 69	.290 35	.289 02	0.74
0.75	0.287 63	.286 35	.285 02	.283 69	.282 36	.281 04	.279 71	.278 39	.277 07	.275 75	0.75
0.76	0.274 44	.273 12	.271 81	.270 50	.269 19	.267 88	.266 57	.265 27	.263 97	.262 66	0.76
0.77	0.261 36	.260 07	.258 77	.257 48	.256 18	.254 89	.253 60	.252 31	.251 03	.249 74	0.77
0.78	0.248 46	.247 18	.245 90	.244 62	.243 35	.242 07	.240 80	.239 53	.238 26	.236 99	0.78
0.79	0.235 72	.234 46	.233 19	.231 93	.230 67	.229 41	.228 16	.226 90	.225 65	.224 29	0.79
0.80	0.223 14	.221 89	.220 65	.219 40	.218 16	.216 91	.215 67	.214 43	.213 19	.211 96	0.80
0.81	0.210 72	.209 49	.208 25	.207 02	.205 79	.204 57	.203 34	.202 12	.200 89	.199 67	0.81
0.82	0.198 45	.197 23	.196 01	.194 80	.193 58	.192 37	.191 16	.189 95	.188 74	.187 54	0.82
0.83	0.186 33	.185 13	.183 92	.182 72	.181 52	.180 32	.179 13	.177 93	.176 74	.175 54	0.83
0.84	0.174 35	.173 16	.171 98	.170 79	.169 60	.168 42	.167 24	.166 05	.164 87	.163 70	0.84
0.85	0.162 52	.161 34	.160 17	.159 00	.157 82	.156 65	.155 48	.154 32	.153 15	.151 99	0.85
0.86	0.150 82	.149 66	.148 50	.147 34	.146 18	.145 03	.143 87	.142 72	.141 56	.140 41	0.86
0.87	0.139 26	.138 11	.136 97	.135 82	.134 67	.133 53	.132 39	.131 25	.130 11	.128 97	0.87
0.88	0.127 83	.126 70	.125 56	.124 43	.123 30	.122 17	.121 04	.119 91	.118 78	.117 66	0.88
0.89	0.116 53	.115 41	.114 29	.113 17	.112 05	.110 93	.109 81	.108 70	.107 59	.106 47	0.89
0.90	0.105 36	.104 25	.103 14	.102 03	.100 93	.099 82	.098 72	.097 61	.096 51	.095 41	0.90
0.91	0.094 31	.093 21	.092 12	.091 02	.089 92	.088 83	.087 74	.086 65	.085 56	.084 47	0.91
0.92	0.083 38	.082 30	.081 21	.080 13	.079 04	.077 96	.076 88	.075 80	.074 72	.073 65	0.92
0.93	0.072 57	.071 50	.070 42	.069 35	.068 28	.067 21	.066 14	.065 07	.064 01	.062 94	0.93
0.94	0.061 88	.060 81	.059 75	.058 69	.057 63	.056 57	.055 51	.054 46	.053 40	.052 35	0.94
0.95	0.051 29	.050 24	.049 19	.048 14	.047 09	.046 04	.045 00	.043 95	.042 91	.041 86	0.95
0.96	0.040 82	.039 78	.038 74	.037 70	.036 66	.035 63	.034 59	.033 56	.032 52	.031 49	0.96
0.97	0.030 46	.029 43	.028 40	.027 37	.026 34	.025 32	.024 29	.023 27	.022 25	.021 22	0.97
0.98	0.020 20	.019 18	.018 16	.017 15	.016 13	.015 11	.014 10	.013 09	.012 07	.011 06	0.98
0.99	0.010 05	.009 04	.008 03	.007 02	.006 02	.005 01	.004 01	.003 00	.002 00	.001 00	0.99

[注] 表内对数值皆取负值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
$\ln 10^n$	2.30259	4.60517	6.90776	9.21034	11.51293	13.81551	16.11810	18.42068	20.72327	$\ln 10^n$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x
1.0	0.000 00	0.009 95	0.019 80	0.029 56	0.039 22	0.048 79	0.058 27	0.067 66	0.076 96	0.086 18	1.0
1.1	0.095 31	.104 36	.113 33	.122 22	.131 03	.139 76	.148 42	.157 00	.165 51	.173 95	1.1
1.2	0.182 32	.190 62	.198 85	.207 01	.215 11	.223 14	.231 11	.239 02	.246 86	.254 64	1.2
1.3	0.262 36	.270 03	.277 63	.285 18	.292 67	.300 10	.307 48	.314 81	.322 08	.329 30	1.3
1.4	0.336 47	.343 59	.350 66	.357 67	.364 64	.371 56	.378 44	.385 26	.392 04	.398 78	1.4
1.5	0.405 47	.412 11	.418 71	.425 27	.431 78	.438 25	.444 69	.451 08	.457 42	.463 73	1.5
1.6	0.470 00	.476 23	.482 43	.488 58	.494 70	.500 78	.506 82	.512 82	.518 79	.524 73	1.6
1.7	0.530 63	.536 49	.542 32	.548 12	.553 89	.559 62	.565 31	.570 98	.576 61	.582 22	1.7
1.8	0.587 79	.593 38	.598 84	.604 32	.609 77	.615 19	.620 58	.625 94	.631 27	.636 58	1.8
1.9	0.641 85	.647 10	.652 33	.657 52	.662 69	.667 83	.672 94	.678 03	.683 10	.688 13	1.9
2.0	0.698 15	.698 13	.70810	.708 04	.712 95	.717 84	.722 71	.727 55	.732 37	.737 16	2.0
2.1	0.741 94	.746 69	.75142	.756 12	.760 81	.765 47	.770 11	.774 73	.779 32	.783 90	2.1
2.2	0.788 46	.792 99	.79751	.802 00	.806 48	.810 93	.815 36	.819 78	.824 18	.828 55	2.2
2.3	0.832 91	.837 25	.84157	.845 87	.850 15	.854 42	.858 66	.862 89	.867 10	.871 29	2.3
2.4	0.875 47	.879 63	.88377	.887 89	.892 00	.896 09	.900 16	.904 22	.908 26	.912 28	2.4
2.5	0.916 29	.920 28	.924 26	.928 22	.932 16	.936 09	.940 01	.943 91	.947 79	.951 66	2.5
2.6	0.955 51	.959 35	.963 17	.966 98	.970 78	.974 56	.978 33	.982 08	.985 82	.989 54	2.6
2.7	0.993 25	.996 95	1.000 63	1.004 30	1.007 96	1.011 60	1.015 23	1.018 85	1.022 45	1.026 04	2.7
2.8	1.029 62	1.038 18	.036 74	.040 28	.043 80	.047 32	.050 82	.054 31	.057 79	.061 26	2.8
2.9	1.064 71	.068 15	.071 58	.075 00	.078 41	.081 81	.085 19	.088 56	.091 92	.095 27	2.9
3.0	1.098 61	.101 94	.105 26	.108 56	.111 86	.115 14	.118 41	.121 68	.124 93	.128 17	3.0
3.1	1.131 40	.134 62	.137 83	.141 03	.144 22	.147 40	.150 57	.153 73	.156 88	.160 02	3.1
3.2	1.163 15	.166 27	.169 38	.172 48	.175 57	.178 65	.181 73	.184 79	.187 84	.190 89	3.2
3.3	1.193 92	.196 95	.199 96	.202 97	.205 97	.208 96	.211 94	.214 91	.217 88	.220 83	3.3
3.4	1.223 78	.226 71	.229 64	.232 56	.235 47	.238 37	.241 27	.244 15	.247 03	.249 90	3.4
3.5	1.252 76	.255 62	.258 46	.261 30	.264 13	.266 95	.269 76	.272 57	.275 36	.278 15	3.5
3.6	1.280 93	.283 71	.286 47	.289 23	.291 98	.294 73	.297 46	.300 19	.302 91	.305 63	3.6
3.7	1.308 33	.311 03	.313 72	.316 41	.319 09	.321 76	.324 42	.327 08	.329 72	.332 37	3.7
3.8	1.335 00	.337 63	.340 25	.342 86	.345 47	.348 07	.350 67	.353 25	.355 84	.358 41	3.8
3.9	1.360 98	.363 54	.366 09	.368 64	.371 18	.373 72	.376 24	.378 77	.381 28	.383 79	3.9
4.0	1.386 29	.388 79	.391 28	.393 77	.396 24	.398 72	.401 18	.403 64	.406 10	.408 54	4.0
4.1	1.410 99	.413 42	.415 85	.418 28	.420 70	.423 11	.425 52	.427 92	.430 31	.432 70	4.1
4.2	1.435 08	.437 46	.439 84	.442 20	.444 56	.446 92	.449 27	.451 61	.453 95	.456 29	4.2
4.3	1.458 62	.460 94	.463 26	.465 57	.467 87	.470 18	.472 47	.474 76	.477 05	.479 33	4.3
4.4	1.481 60	.483 87	.486 14	.488 40	.490 65	.492 90	.495 15	.497 39	.499 62	.501 85	4.4
4.5	1.504 08	.506 30	.508 51	.510 72	.512 93	.515 13	.517 32	.519 51	.521 70	.523 88	4.5
4.6	1.526 06	.528 23	.530 39	.532 56	.534 71	.536 87	.539 02	.541 16	.543 30	.545 43	4.6
4.7	1.547 56	.549 69	.551 81	.553 93	.556 04	.558 14	.560 25	.562 35	.564 44	.566 53	4.7
4.8	1.568 62	.570 70	.572 77	.574 85	.576 91	.578 98	.581 04	.583 09	.585 15	.587 19	4.8
4.9	1.589 24	.591 27	.593 31	.595 34	.597 37	.599 39	.601 41	.603 42	.605 43	.607 44	4.9
5.0	1.609 44	.611 44	.613 43	.615 42	.617 41	.619 39	.621 37	.623 34	.625 31	.627 28	5.0
5.1	1.629 24	.631 20	.633 15	.635 11	.637 05	.639 00	.640 94	.642 87	.644 81	.646 73	5.1
5.2	1.648 66	.650 53	.652 50	.654 41	.656 32	.658 23	.660 13	.662 03	.663 93	.665 82	5.2
5.3	1.667 71	.669 59	.671 47	.673 35	.675 23	.677 10	.678 96	.680 83	.682 69	.684 55	5.3
5.4	1.686 40	.688 25	.690 10	.691 94	.693 78	.695 62	.697 45	.699 23	.701 11	.702 93	5.4

[注] 表内对数值皆取负值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
ln 10 ⁿ	2.30259	4.60517	6.90776	9.21034	11.51293	13.81551	16.11810	18.42068	20.72327	ln 10 ⁿ

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*
5.5	1.704 75	1.706 56	1.708 33	1.710 19	1.711 99	1.713 80	1.715 60	1.717 40	1.719 19	1.720 93	5.5
5.6	1.722 77	.724 55	.726 33	.728 11	.729 83	.731 66	.733 42	.735 19	.736 95	.738 71	5.6
5.7	1.740 47	.742 22	.743 97	.745 72	.747 48	.749 20	.750 94	.752 67	.754 40	.756 13	5.7
5.3	1.757 86	.759 53	.761 30	.763 02	.764 73	.766 44	.768 15	.769 85	.771 56	.773 26	5.3
5.9	1.774 95	.776 65	.778 34	.780 02	.781 71	.783 39	.785 07	.786 75	.788 42	.790 09	5.9
6.0	1.791 76	.793 42	.795 09	.796 75	.798 40	.800 06	.801 71	.803 36	.805 00	.806 65	6.0
6.1	1.808 29	.809 93	.811 56	.813 19	.814 82	.816 45	.818 08	.819 70	.821 32	.822 94	6.1
6.2	1.824 55	.826 16	.827 77	.829 33	.830 93	.832 53	.834 18	.835 73	.837 37	.838 96	6.2
6.3	1.840 55	.842 14	.843 72	.845 30	.846 83	.848 45	.850 03	.851 60	.853 17	.854 73	6.3
6.4	1.856 30	.857 86	.859 42	.860 97	.862 53	.864 08	.865 63	.867 18	.868 72	.870 26	6.4
6.5	1.871 30	.873 84	.874 87	.876 41	.877 94	.879 47	.880 99	.882 51	.884 03	.885 55	6.5
6.6	1.887 07	.888 58	.890 10	.891 60	.893 11	.894 62	.896 12	.897 62	.899 12	.900 61	6.6
6.7	1.902 11	.903 60	.905 09	.906 58	.908 06	.909 54	.911 02	.912 50	.913 98	.915 45	6.7
6.3	1.916 92	.918 39	.919 86	.921 32	.922 79	.924 25	.925 71	.927 16	.928 62	.930 07	6.3
6.9	1.931 52	.932 97	.934 42	.935 86	.937 30	.938 74	.940 18	.941 62	.943 05	.944 48	6.9
7.0	1.945 91	.947 34	.948 76	.950 19	.951 61	.953 03	.954 45	.955 86	.957 27	.958 69	7.0
7.1	1.960 09	.961 50	.962 91	.964 31	.965 71	.967 11	.968 51	.969 91	.971 30	.972 69	7.1
7.2	1.974 08	.975 47	.976 85	.978 24	.979 62	.981 00	.982 38	.983 76	.985 13	.986 50	7.2
7.3	1.987 87	.989 24	.990 61	.991 98	.993 34	.994 70	.996 06	.997 42	.998 77	2.000 13	7.3
7.4	2.001 48	2.002 83	2.004 18	2.005 53	2.006 87	2.008 21	2.009 56	2.010 89	2.012 23	.013 57	7.4
7.5	2.014 90	.016 24	.017 57	.018 90	.020 22	.021 55	.022 87	.024 19	.025 51	.026 83	7.5
7.6	2.028 15	.029 46	.030 78	.032 09	.033 40	.034 71	.036 01	.037 32	.038 62	.039 92	7.6
7.7	2.041 22	.042 52	.043 81	.045 11	.046 40	.047 69	.048 93	.050 27	.051 56	.052 84	7.7
7.8	2.054 12	.055 40	.056 68	.057 96	.059 24	.060 51	.061 79	.063 06	.064 33	.065 60	7.8
7.9	2.066 86	.068 13	.069 39	.070 65	.071 91	.073 17	.074 43	.075 63	.076 94	.078 19	7.9
8.0	2.079 44	.030 69	.081 94	.083 18	.084 43	.085 67	.086 91	.088 15	.089 39	.090 63	8.0
8.1	2.091 86	.093 10	.094 33	.095 56	.096 79	.098 02	.099 24	.100 47	.101 69	.102 91	8.1
8.2	2.104 13	.105 35	.106 57	.107 79	.109 00	.110 21	.111 42	.112 63	.113 84	.115 05	8.2
8.3	2.116 26	.117 46	.118 66	.119 86	.121 06	.122 26	.123 46	.124 65	.125 85	.127 04	8.3
8.4	2.123 23	.129 42	.130 61	.131 80	.132 93	.134 17	.135 35	.136 53	.137 71	.138 89	8.4
8.5	2.140 07	.141 24	.142 42	.143 59	.144 76	.145 93	.147 10	.148 27	.149 43	.150 60	8.5
8.6	2.151 76	.152 92	.154 09	.155 24	.156 40	.157 56	.158 71	.159 87	.161 02	.162 17	8.6
8.7	2.163 32	.164 47	.165 62	.166 77	.167 91	.169 05	.170 20	.171 34	.172 48	.173 61	8.7
8.8	2.174 75	.175 89	.177 02	.178 16	.179 29	.180 42	.181 55	.182 67	.183 80	.184 93	8.8
8.9	2.186 05	.187 17	.188 30	.189 42	.190 54	.191 65	.192 77	.193 89	.195 00	.196 11	8.9
9.0	2.197 22	.198 34	.199 44	.200 55	.201 66	.202 76	.203 87	.204 97	.206 07	.207 17	9.0
9.1	2.208 27	.209 37	.210 47	.211 57	.212 66	.213 75	.214 85	.215 94	.217 03	.218 12	9.1
9.2	2.219 20	.220 29	.221 38	.222 46	.223 54	.224 62	.225 70	.226 78	.227 86	.228 94	9.2
9.3	2.230 01	.231 09	.232 16	.233 24	.234 31	.235 38	.236 45	.237 51	.238 58	.239 65	9.3
9.4	2.240 71	.241 77	.242 84	.243 90	.244 96	.246 01	.247 07	.248 13	.249 18	.250 24	9.4
9.5	2.251 29	.252 34	.253 39	.254 44	.255 49	.256 54	.257 59	.258 63	.259 68	.260 72	9.5
9.6	2.261 76	.262 80	.263 84	.264 88	.265 92	.266 96	.267 99	.269 03	.270 06	.271 09	9.6
9.7	2.272 13	.273 16	.274 19	.275 21	.276 24	.277 27	.278 29	.279 32	.280 34	.281 36	9.7
9.3	2.282 53	.283 40	.284 42	.285 44	.286 46	.287 47	.288 49	.289 50	.290 51	.291 52	9.8
9.9	2.292 53	.293 54	.294 55	.295 56	.296 57	.297 57	.298 58	.299 58	.300 58	.301 58	9.9

[注] 表内对数值皆取负值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
ln 10 ⁿ	2.30259	4.60517	6.90776	9.21034	11.51293	13.81551	16.11310	18.42063	20.72327	ln 10 ⁿ

<i>x</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>x</i>
10	2.302 59	2.312 54	2.322 39	2.332 14	2.341 81	2.351 33	2.360 85	2.370 24	2.379 55	2.388 76	10
11	2.397 90	.406 95	.415 91	.424 80	.433 61	.442 35	.451 01	.459 59	.468 10	.476 54	11
12	2.484 91	.493 21	.501 44	.509 60	.517 70	.525 73	.533 70	.541 60	.549 45	.557 23	12
13	2.564 95	.572 61	.580 22	.587 76	.595 25	.602 69	.610 07	.617 40	.624 67	.631 89	13
14	2.639 06	.646 17	.653 24	.660 25	.667 23	.674 15	.681 02	.687 85	.694 63	.701 36	14
15	2.708 05	.714 69	.721 30	.727 85	.734 37	.740 84	.747 27	.753 66	.760 01	.766 32	15
16	2.772 59	.778 82	.785 01	.791 17	.797 23	.803 36	.809 40	.815 41	.821 38	.827 31	16
17	2.833 21	.839 03	.844 91	.850 71	.856 47	.862 20	.867 90	.873 56	.879 20	.884 80	17
18	2.890 37	.895 91	.901 42	.906 90	.912 35	.917 77	.923 16	.928 52	.933 86	.939 16	18
19	2.944 44	.949 69	.954 91	.960 11	.965 27	.970 41	.975 53	.980 62	.985 63	.990 72	19
20	2.995 73	3.000 72	3.005 63	3.010 62	3.015 53	3.020 42	3.025 29	3.030 13	3.034 95	3.039 75	20
21	3.044 52	.049 27	.054 00	.058 71	.063 39	.068 05	.072 69	.077 31	.081 91	.086 49	21
22	3.091 04	.095 58	.100 09	.104 59	.109 06	.113 52	.117 95	.122 37	.126 76	.131 14	22
23	3.135 49	.139 83	.144 15	.148 45	.152 74	.157 00	.161 25	.165 48	.169 69	.173 83	23
24	3.178 05	.182 21	.186 35	.190 48	.194 58	.198 67	.202 75	.206 80	.210 84	.214 87	24
25	3.218 83	.222 37	.226 84	.230 80	.234 75	.238 68	.242 59	.246 49	.250 37	.254 24	25
26	3.258 10	.261 94	.265 76	.269 57	.273 36	.277 14	.280 91	.284 66	.288 40	.292 13	26
27	3.295 84	.299 63	.303 22	.306 89	.310 54	.314 19	.317 82	.321 43	.325 04	.328 63	27
28	3.332 20	.335 77	.339 82	.342 86	.346 39	.349 90	.353 41	.356 90	.360 38	.363 84	28
29	3.367 30	.370 74	.374 17	.377 59	.380 99	.384 39	.387 77	.391 15	.394 51	.397 86	29
30	3.401 20	.404 59	.407 84	.411 15	.414 44	.417 73	.421 00	.424 26	.427 51	.430 76	30
31	3.433 99	.437 21	.440 42	.443 62	.446 81	.449 99	.453 16	.456 32	.459 47	.462 61	31
32	3.465 74	.468 86	.471 97	.475 07	.478 16	.481 24	.484 31	.487 38	.490 43	.493 47	32
33	3.496 51	.499 58	.502 55	.505 56	.508 56	.511 55	.514 53	.517 50	.520 46	.523 42	33
34	3.526 36	.529 30	.532 23	.535 15	.538 06	.540 96	.543 85	.546 74	.549 62	.552 49	34
35	3.555 35	.558 20	.561 05	.563 88	.566 71	.569 53	.572 35	.575 15	.577 95	.580 74	35
36	3.583 52	.586 29	.589 06	.591 82	.594 57	.597 31	.600 05	.602 78	.605 50	.608 21	36
37	3.610 92	.613 62	.616 31	.618 99	.621 67	.624 34	.627 00	.629 66	.632 31	.634 95	37
38	3.637 59	.640 21	.642 84	.645 45	.648 08	.650 66	.653 25	.655 84	.658 42	.660 99	38
39	3.663 56	.666 12	.668 63	.671 22	.673 77	.676 30	.678 83	.681 35	.683 87	.686 38	39
40	3.688 83	.691 33	.693 87	.696 35	.698 83	.701 30	.703 77	.706 23	.708 68	.711 13	40
41	3.713 57	.716 01	.718 44	.720 86	.723 23	.725 69	.728 10	.730 50	.732 90	.735 29	41
42	3.737 67	.740 05	.742 42	.744 79	.747 15	.749 50	.751 85	.754 20	.756 54	.758 87	42
43	3.761 20	.763 52	.765 84	.768 15	.770 46	.772 76	.775 06	.777 35	.779 63	.781 91	43
44	3.784 19	.786 46	.788 72	.790 98	.793 24	.795 49	.797 73	.799 97	.802 21	.804 44	44
45	3.806 66	.808 88	.811 10	.813 31	.815 51	.817 71	.819 91	.822 10	.824 23	.826 47	45
46	3.823 64	.830 81	.832 93	.835 14	.837 30	.839 45	.841 60	.843 74	.845 88	.848 02	46
47	3.850 15	.852 27	.854 39	.856 51	.858 62	.860 73	.862 83	.864 93	.867 03	.869 12	47
48	3.871 20	.873 28	.875 33	.877 43	.879 50	.881 56	.883 62	.885 68	.887 73	.889 78	48
49	3.891 82	.893 86	.895 89	.897 92	.899 95	.901 97	.903 99	.906 00	.908 01	.910 02	49
50	3.912 02	.914 02	.916 01	.918 01	.919 99	.921 97	.923 95	.925 93	.927 90	.929 86	50
51	3.931 83	.933 78	.935 74	.937 69	.939 64	.941 53	.943 52	.945 48	.947 39	.949 32	51
52	3.951 24	.953 16	.955 03	.957 00	.958 91	.960 81	.962 72	.964 62	.966 51	.968 40	52
53	3.970 29	.972 18	.974 06	.975 94	.977 81	.979 63	.981 55	.983 41	.985 27	.987 13	53
54	3.989 93	.990 83	.992 63	.994 52	.996 36	.998 20	4.000 03	4.001 88	4.003 69	4.005 51	54

[注] 表内对数值皆取负值

<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>n</i>
$\ln 10^n$	2.30259	4.60517	6.90776	9.21034	11.51293	13.81551	16.11810	18.42068	20.72327	$\ln 10^n$

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*
55	4.007 33	4.009 15	4.010 93	4.012 77	4.014 53	4.016 33	4.018 18	4.019 93	4.021 77	4.023 56	55
56	4.025 35	.027 14	.028 92	.030 69	.032 47	.034 24	.036 01	.037 77	.039 54	.041 30	56
57	4.043 05	.044 30	.046 55	.048 30	.050 04	.051 78	.053 52	.055 26	.056 99	.058 72	57
58	4.060 44	.062 17	.063 39	.065 60	.067 32	.069 03	.070 73	.072 44	.074 14	.075 34	58
59	4.077 54	.079 23	.080 92	.082 61	.084 29	.085 98	.087 66	.089 33	.091 01	.092 63	59
60	4.094 34	.096 01	.097 67	.099 33	.100 99	.102 64	.104 29	.105 94	.107 59	.109 23	60
61	4.110 37	.112 51	.114 15	.115 78	.117 41	.119 04	.120 66	.122 23	.123 90	.125 52	61
62	4.127 13	.123 75	.130 35	.131 96	.133 57	.135 17	.136 77	.138 36	.139 96	.141 55	62
63	4.143 13	.144 72	.146 30	.147 89	.149 46	.151 04	.152 61	.154 18	.155 75	.157 32	63
64	4.153 33	.160 44	.162 00	.163 56	.165 11	.166 67	.168 21	.169 76	.171 31	.172 85	64
65	4.174 39	.175 92	.177 46	.178 99	.180 52	.182 05	.183 58	.185 10	.186 62	.188 14	65
66	4.139 65	.191 17	.192 63	.194 19	.195 70	.197 20	.193 70	.200 20	.201 70	.203 20	66
67	4.204 69	.206 18	.207 67	.209 16	.210 65	.212 13	.213 61	.215 09	.216 56	.218 04	67
68	4.219 51	.220 93	.222 44	.223 91	.225 37	.226 83	.228 29	.229 75	.231 20	.232 66	68
69	4.234 11	.235 55	.237 00	.238 44	.239 89	.241 33	.242 76	.244 20	.245 63	.247 07	69
70	4.243 50	.249 92	.251 35	.252 77	.254 19	.255 61	.257 03	.258 45	.259 86	.261 27	70
71	4.262 68	.264 09	.265 49	.266 90	.268 30	.269 70	.271 10	.272 49	.273 88	.275 23	71
72	4.276 67	.278 05	.279 44	.280 82	.282 21	.283 59	.284 96	.286 34	.287 72	.289 09	72
73	4.290 46	.291 83	.293 20	.294 56	.295 92	.297 29	.298 65	.300 00	.301 36	.302 71	73
74	4.304 07	.305 42	.306 76	.308 11	.309 46	.310 80	.312 14	.313 48	.314 82	.316 15	74
75	4.317 49	.318 82	.320 15	.321 48	.322 81	.324 13	.325 46	.326 78	.328 10	.329 42	75
76	4.330 73	.332 05	.333 36	.334 67	.335 98	.337 29	.338 60	.339 90	.341 20	.342 51	76
77	4.343 81	.345 10	.346 40	.347 69	.348 99	.350 23	.351 57	.352 86	.354 14	.355 43	77
78	4.356 71	.357 99	.359 27	.360 55	.361 82	.363 10	.364 37	.365 64	.366 91	.368 13	78
79	4.369 45	.370 71	.371 93	.373 24	.374 50	.375 76	.377 01	.378 27	.379 52	.380 73	79
80	4.332 03	.383 23	.384 52	.385 77	.387 01	.388 26	.389 50	.390 74	.391 93	.393 21	80
81	4.394 45	.395 63	.396 92	.398 15	.399 33	.400 60	.401 83	.403 05	.404 23	.405 50	81
82	4.406 72	.407 94	.409 16	.410 37	.411 59	.412 80	.414 01	.415 22	.416 43	.417 64	82
83	4.418 84	.420 04	.421 25	.422 45	.423 65	.424 85	.426 04	.427 24	.428 43	.429 63	83
84	4.430 82	.432 01	.433 19	.434 33	.435 57	.436 75	.437 93	.439 12	.440 30	.441 47	84
85	4.442 65	.443 83	.445 00	.446 17	.447 35	.448 52	.449 69	.450 85	.452 02	.453 18	85
86	4.454 35	.455 51	.456 67	.457 83	.458 99	.460 14	.461 30	.462 45	.463 61	.464 76	86
87	4.465 91	.467 06	.468 20	.469 35	.470 50	.471 64	.472 78	.473 92	.475 06	.476 20	87
88	4.477 34	.478 47	.479 61	.480 74	.481 87	.483 00	.484 13	.485 26	.486 39	.487 51	88
89	4.483 64	.489 76	.490 83	.492 00	.493 12	.494 24	.495 36	.496 47	.497 53	.498 70	89
90	4.499 81	.500 92	.502 03	.503 14	.504 24	.505 35	.506 45	.507 56	.508 66	.509 76	90
91	4.510 86	.511 96	.513 05	.514 15	.515 25	.516 34	.517 43	.518 52	.519 61	.520 70	91
92	4.521 79	.522 87	.523 96	.525 04	.526 13	.527 21	.528 29	.529 37	.530 45	.531 52	92
93	4.532 60	.533 67	.534 75	.535 82	.536 89	.537 96	.539 03	.540 10	.541 16	.542 23	93
94	4.543 29	.544 36	.545 42	.546 48	.547 54	.548 60	.549 66	.550 71	.551 77	.552 82	94
95	4.553 83	.554 93	.555 93	.557 03	.558 03	.559 13	.560 17	.561 22	.562 26	.563 31	95
96	4.564 35	.565 39	.566 43	.567 47	.568 51	.569 54	.570 58	.571 61	.572 65	.573 68	96
97	4.574 71	.575 74	.576 77	.577 80	.578 83	.579 85	.580 88	.581 90	.582 92	.583 95	97
98	4.584 97	.585 99	.587 01	.588 02	.589 04	.590 06	.591 07	.592 09	.593 10	.594 11	98
99	4.595 12	.596 13	.597 14	.598 15	.599 15	.600 16	.601 16	.602 17	.603 17	.604 17	99

[注] 表内对数值皆取负值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
ln 10 ⁿ	2.30259	4.60517	6.90776	9.21034	11.51293	13.81551	16.11810	18.42063	20.72327	ln 10 ⁿ

39. 阶乘和阶乘的对数表

$$N! = \frac{N!}{10^x} \cdot 10^x, \text{ 其中 } x \text{ 为 } \log N! \text{ 的整数部分}$$

例如 $15! = 1.3077 \times 10^{12}$ (5 位有效数字)

N	$\frac{N!}{10^x}$	$\log N!$	N	$\frac{N!}{10^x}$	$\log N!$	N	$\frac{N!}{10^x}$	$\log N!$	N	$\frac{N!}{10^x}$	$\log N!$
0	1	0.0000	50	3.0414	64.48307	100	9.8326	157.97000	150	5.7184	262.75639
1	1	0.0000	51	1.5511	66.19065	101	9.4259	159.97439	151	5.6272	264.93587
2	2	0.30103	52	8.0658	67.90665	102	9.6145	161.93299	152	1.3118	267.11771
3	6	0.77815	53	4.2749	69.63092	103	9.9029	163.99576	153	2.0068	269.30241
4	24	1.38021	54	2.3084	71.36332	104	1.0299	166.01230	154	3.0893	271.48993
5	120	2.07918	55	1.2696	73.10363	105	1.0314	168.03999	155	4.7391	273.68026
6	720	2.85723	56	7.1100	74.85187	106	1.1463	170.05929	156	7.4711	275.87333
7	5,040	3.70243	57	4.0527	76.60774	107	1.2265	172.03867	157	1.1730	278.06928
8	40,320	4.60552	58	2.3506	78.37117	108	1.3246	174.12210	158	1.8533	280.26794
9	362,880	5.55976	59	1.3368	80.14202	109	1.4439	176.15952	159	2.9467	282.46934
10	3,628,800	6.55976	60	8.3210	81.92017	110	1.5382	178.20092	160	4.7147	284.67346
11	39,916,800	7.60116	61	5.0753	83.70550	111	1.7680	180.24624	161	7.5907	286.88023
12	479,001,600	8.68034	62	3.1470	85.49790	112	1.9745	182.29546	162	1.2297	289.08980
13	6,227,020,800	9.79428	63	1.9326	87.29724	113	2.2312	184.34854	163	2.0044	291.30193
14	87,178,291,200	10.94041	64	1.2689	89.10342	114	2.5486	186.40544	164	3.2372	293.51633
15	1,307,674,368,000	12.11650	65	8.2477	90.91632	115	2.9251	188.46614	165	5.4239	295.73431
16		2.0923	66	5.4434	92.73587	116	3.3931	190.53060	166	9.0037	297.95442
17		3.5569	67	3.6471	94.56195	117	3.9699	192.59873	167	1.5036	300.17714
18		6.4024	68	2.4800	96.39446	118	4.6345	194.67067	168	2.5261	302.40245
19		1.2165	69	1.7112	98.23331	119	5.5746	196.74621	169	4.2691	304.63033
20		2.4329	70	1.1979	100.07841	120	6.6395	198.82539	170	7.2574	306.86073
21		5.1091	71	3.5048	101.92966	121	8.0943	200.90818	171	1.2410	309.09378
22		1.1240	72	6.1234	103.78700	122	9.3750	202.99454	172	2.1346	311.32951
23		2.5852	73	4.4701	105.65032	123	1.2146	205.08444	173	3.6928	313.56785
24		6.2045	74	3.3079	107.51955	124	1.5061	207.17787	174	6.4254	315.80790
25		1.5511	75	2.4309	109.39461	125	1.8327	209.27478	175	1.1244	318.05094
26		4.0329	76	1.8355	111.27543	126	2.3722	211.37515	176	1.9790	320.29645
27		1.0889	77	1.4518	113.16192	127	3.0127	213.47895	177	3.5029	322.54443
28		3.0489	78	1.1324	115.05401	128	3.8562	215.58616	178	6.2351	324.79485
29		8.8418	79	3.9462	116.95164	129	4.9745	217.69675	179	1.1161	327.04770
30		2.6525	80	7.1569	118.85473	130	6.4669	219.81069	180	2.0090	329.30297
31		8.2228	81	5.7971	120.76321	131	8.4716	221.92796	181	3.6362	331.56065
32		2.6313	82	4.7536	122.67703	132	1.1182	224.04354	182	6.6179	333.82072
33		8.6833	83	3.9455	124.59610	133	1.4373	226.17239	183	1.2111	336.08317
34		2.9523	84	3.3142	126.52038	134	1.9929	228.29949	184	2.2234	338.34799
35		1.0333	85	2.8171	128.44980	135	2.6905	230.42983	185	4.1225	340.61516
36		3.7199	86	2.4227	130.38430	136	3.6590	232.56337	186	7.6679	342.88467
37		1.3764	87	2.1078	132.32382	137	5.0129	234.70009	187	1.4339	345.15652
38		5.2302	88	1.8643	134.26830	138	6.9173	236.83997	188	2.6957	347.43067
39		2.0398	89	1.6503	136.21769	139	9.6157	238.98293	189	5.0949	349.70714
40		8.1592	90	1.4857	138.17194	140	1.3462	241.12911	190	9.6303	351.98589
41		3.9453	91	1.3520	140.13098	141	1.8981	243.27833	191	1.8439	354.26692
42		1.4050	92	1.2438	142.09477	142	2.6954	245.43062	192	3.5500	356.55022
43		6.0415	93	1.1568	144.06325	143	3.8544	247.58595	193	6.8514	358.83578
44		2.6539	94	1.0874	146.03638	144	5.5509	249.74432	194	1.3292	361.12358
45		1.1962	95	1.0330	148.01410	145	8.0479	251.90568	195	2.5919	363.41362
46		5.5026	96	9.9163	149.99637	146	1.1750	254.07004	196	5.0801	365.70537
47		2.5862	97	9.6193	151.98314	147	1.7272	256.23735	197	1.0003	368.00034
48		1.2414	98	9.4269	153.97437	148	2.5563	258.40762	198	1.9816	370.29701
49		6.0828	99	9.3326	155.97000	149	3.8089	260.58080	199	3.9433	372.59536
50		3.0414	100	9.3326	157.97000	150	5.7184	262.75689	200	7.8866	374.89639

40. 二项系数表

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1
2		3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	2
3			10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969	1140	3	
4				35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2390	3080	3876	4845	4		
5					126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504	5			
6						462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760	6				
7							1716	3432	6435	11440	19448	31824	50368	77520	7					
8								6435	12870	24310	43758	75532	125970	8						
9									24310	48620	92378	167960	9							
10										92378	184756	10								

41. 二项系数的对数表

$$\log \binom{n}{k} = \log \binom{n}{n-k}$$

$\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$
1	0.3010	0.4771	0.6021	0.6990	0.7782	0.8451	0.9031	0.9542	1.0000	1
2		0.4771	0.7782	1.0000	1.1761	1.3222	1.4472	1.5563	1.6532	2
3			1.0000	1.3010	1.5441	1.7482	1.9243	2.0792	3	
4				1.5441	1.8451	2.1004	2.3222	4		
5					2.1004	2.4014	5			

$\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$
1	1.0414	1.0792	1.1139	1.1461	1.1761	1.2041	1.2304	1.2553	1.2788	1.3010	1
2	1.7404	1.8195	1.8921	1.9590	2.0212	2.0792	2.1335	2.1847	2.2330	2.2738	2
3	2.2175	2.3424	2.4564	2.5611	2.6580	2.7432	2.8325	2.9117	2.9963	3.0569	3
4	2.5135	2.6946	2.8543	3.0004	3.1351	3.2601	3.3766	3.4857	3.5884	3.6359	4
5	2.6846	2.8937	3.1096	3.3015	3.4776	3.6403	3.7916	3.9329	4.0655	4.1904	5
6	2.6846	2.9857	3.2345	3.4776	3.6994	3.9035	4.0926	4.2637	4.4335	4.5334	6
7			3.2345	3.5355	3.8085	4.0534	4.2339	4.5023	4.7023	4.8394	7
8				3.8085	4.1093	4.3853	4.6411	4.8784	5.1003	8	
9					4.3853	4.6368	4.8656	5.2252	9		
10						4.9656	5.2666	10			

$\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	$\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$
1	1.3222	1.3424	1.3617	1.3802	1.3979	1.4150	1.4314	1.4472	1.4624	1.4771	1
2	2.9222	2.3636	2.4031	2.4409	2.4771	2.5119	2.5458	2.5775	2.6085	2.6335	2
3	3.1299	3.1875	3.2432	3.3062	3.3617	3.4150	3.4661	3.5158	3.5628	3.6085	3
4	3.7771	3.8642	3.9472	4.0264	4.1021	4.1746	4.2448	4.3112	4.3757	4.4378	4
5	4.3085	4.4205	4.5270	4.6284	4.7258	4.8181	4.9070	4.9925	5.0747	5.1538	5
6	4.7845	4.8723	5.0041	5.1290	5.2482	5.3622	5.4719	5.5760	5.6767	5.7736	6
7	5.0655	5.2318	5.3894	5.5392	5.6819	5.8181	5.9484	6.0734	6.1933	6.3087	7
8	5.3085	5.5048	5.6905	5.8666	6.0341	6.1933	6.3464	6.4925	6.6327	6.7674	8
9	5.4682	5.6967	5.9123	6.1164	6.3103	6.4943	6.6709	6.8393	7.0007	7.1556	9
10	5.5474	5.8107	6.0535	6.2925	6.5144	6.7252	6.9262	7.1180	7.3017	7.4773	10
11	5.5474	5.8485	6.1310	6.3973	6.6491	6.8880	7.1152	7.3319	7.5390	7.7374	11
12			6.1310	6.4320	6.7160	6.9849	7.2401	7.4332	7.7151	7.9370	12
13				6.7160	7.0171	7.3023	7.5734	7.8316	8.0785	13	
14					7.3023	7.6033	7.8396	8.1626	14		
15						7.8396	8.1907	15			

k	n	81	82	83	84	35	36	37	38	39	40	n	k
1		1.4914	1.5051	1.5135	1.5215	1.5441	1.5563	1.5632	1.5793	1.5911	1.6021		1
2		2.6675	2.6955	2.7226	2.7490	2.7745	2.7993	2.8225	2.8470	2.8693	2.8921		2
3		3.6527	3.6955	3.7369	3.7770	3.8159	3.8537	3.8904	3.9261	3.9609	3.9943		3
4		4.4978	4.5553	4.6119	4.6669	4.7190	4.7702	4.8193	4.8661	4.9151	4.9609		4
5		5.2302	5.3040	5.3754	5.4444	5.5114	5.5763	5.6394	5.7007	5.7602	5.8182		5
6		5.8670	5.9572	6.0444	6.1287	6.2104	6.2895	6.3664	6.4410	6.5136	6.5841		6
7		6.4199	6.5271	6.6306	6.7308	6.8277	6.9216	7.0126	7.1011	7.1870	7.2705		7
8		6.8970	7.0219	7.1425	7.2590	7.3717	7.4809	7.5867	7.6893	7.7890	7.8860		8
9		7.3045	7.4479	7.5862	7.7193	7.8489	7.9738	8.0948	8.2122	8.3262	8.4369		9
10		7.6469	7.8096	7.9664	8.1177	8.2633	8.4052	8.5420	8.6746	8.8023	8.9232		10
11		7.9277	8.1107	8.2868	8.4565	8.6204	8.7787	8.9320	9.0804	9.2243	9.3640		11
12		8.1498	8.3537	8.5500	8.7391	8.9214	9.0975	9.2678	9.4326	9.5923	9.7472		12
13		8.3144	8.5403	8.7588	8.9675	9.1692	9.3638	9.5518	9.7336	9.9097	10.0304		13
14		8.4235	8.6734	8.9132	9.1486	9.3665	9.5794	9.7858	9.9854	10.1785	10.3656		14
15		8.4779	8.7526	9.0153	9.2686	9.5116	9.7457	9.9715	10.1895	10.4004	10.6045		15
16		8.4779	8.7789	9.0670	9.3482	9.6085	9.8638	10.1098	10.3471	10.5765	10.7933		16
17				9.0670	9.2630	9.6563	9.9344	10.2015	10.4591	10.7077	10.9431		17
18						9.6563	9.9579	10.2473	10.5261	10.7949	11.0545		18
19								10.2473	10.5483	10.8334	11.1132		19
20										10.8334	11.1394		20

k	n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	n	k
1		1.6123	1.6232	1.6335	1.6435	1.6532	1.6623	1.6721	1.6812	1.6902	1.6990		1
2		2.9133	2.9350	2.9557	2.9759	2.9956	3.0149	3.0333	3.0523	3.0704	3.0881		2
3		4.0278	4.0599	4.0914	4.1220	4.1520	4.1813	4.2099	4.2379	4.2654	4.2923		3
4		5.0055	5.0489	5.0914	5.1327	5.1732	5.2127	5.2513	5.2891	5.3261	5.3623		4
5		5.8747	5.9298	5.9834	6.0358	6.0870	6.1370	6.1858	6.2336	6.2803	6.3261		5
6		6.6529	6.7193	6.7851	6.8487	6.9109	6.9716	7.0309	7.0889	7.1456	7.2011		6
7		7.3518	7.4310	7.5082	7.5834	7.6569	7.7286	7.7986	7.8670	7.9340	7.9995		7
8		7.9802	8.0720	8.1614	8.2485	8.3336	8.4165	8.4976	8.5767	8.6542	8.7299		8
9		8.5445	8.6492	8.7512	8.8506	8.9475	9.0421	9.1344	9.2246	9.3127	9.3989		9
10		9.0496	9.1677	9.2827	9.3947	9.5033	9.6103	9.7142	9.8156	9.9143	10.0117		10
11		9.4996	9.6315	9.7598	9.8848	10.0065	10.1252	10.2410	10.3540	10.4644	10.5723		11
12		9.8976	10.0437	10.1858	10.3241	10.4588	10.5901	10.7181	10.8430	10.9650	11.0842		12
13		10.2460	10.4069	10.5632	10.7153	10.8634	11.0076	11.1482	11.2854	11.4193	11.5501		13
14		10.5470	10.7231	10.8942	11.0605	11.2224	11.3800	11.5336	11.6833	11.8295	11.9721		14
15		10.8023	10.9942	11.1805	11.3616	11.5377	11.7090	11.8760	12.0387	12.1974	12.3523		15
16		11.0132	11.2214	11.4235	11.6198	11.8107	11.9963	12.1770	12.3531	12.5248	12.6923		16
17		11.1907	11.4060	11.6245	11.8365	12.0426	12.2430	12.4379	12.6273	12.8129	12.9933		17
18		11.3056	11.5436	11.7842	12.0126	12.2345	12.4501	12.6598	12.8639	13.0627	13.2566		18
19		11.3336	11.6501	11.9033	12.1439	12.3871	12.6135	12.8434	13.0623	13.2754	13.4830		19
20		11.4300	11.7108	11.9825	12.2458	12.5010	12.7488	12.9896	13.2236	13.4514	13.6733		20
21		11.4300	11.7310	12.0220	12.3033	12.5763	12.8416	13.0997	13.3496	13.5916	13.8232		21
22				12.0220	12.3231	12.6146	12.8971	13.1713	13.4375	13.6964	13.9432		22
23						12.6146	12.9156	13.2075	13.4903	13.7660	14.0336		23
24								13.2075	13.5035	13.8003	14.0843		24
25										13.8003	14.1018		25

42. 常用常数表

	x	$\frac{1}{x}$	$\log x$
π	3.1415926536	0.3183098862	0.4971493727
π^2	9.8696044011	0.1013211836	0.9942997454
$\sqrt{\pi}$	1.7724538509	0.5641895335	0.2435749363
$\sqrt{2\pi}$	2.5066282746	0.3989422304	0.3990399342
$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	1.2533141373	0.7973845608	0.0930599385
e	2.7182818285	0.3678794412	0.4342944319
\sqrt{e}	1.6437212707	0.6065306597	0.2171472410
$\log e$	0.4342944319	2.3025350930	-0.3622156387
$\sqrt{2}$	1.4142135624	0.7071067812	0.1505149978
$\sqrt{3}$	1.7320508076	0.5773502692	0.2485606274
$\sqrt{10}$	3.1622776602	0.3162277660	0.5000000000
$\sqrt[3]{2}$	1.2599210499	0.7937005260	0.1002433319
$\sqrt[3]{3}$	1.4422495703	0.6933612744	0.1590404132
$\sqrt[3]{10}$	2.1544346900	0.4641533833	0.3333333333
γ (欧拉常数)	0.5772156649	1.7324547146	-0.2336613912

表的说明

表 1—3

假设随机变数 U 服从标准正态分布, 即均值为 0, 标准差为 1 的正态分布, 记为 $N(0, 1)$. 它的概率密度函数为

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad (1)$$

累积分布函数为

$$P(U < u) = \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (2)$$

此处 $P(\quad)$ 表示满足括号内关系式(例如 $U < u$)的概率.

表 1 对于 $0 \leq u \leq 4.99$ 给出了 $\varphi(u)$ 的数值. 当 $u < 0$ 时, 因为 $\varphi(u) = \varphi(-u)$, 故可查 $\varphi(|u|)$.

表 2 对于 $-4.99 \leq u \leq 4.99$, 给出了 $\Phi(u)$ 的数值.

在表 1, 2 中, u 值列在第一列和第一行. 第一列表示 u 的整数部分及小数点后第一位. 而第一行则为 u 的小数点后第二位数. 例如 $u = 1.56$, 1.5 放在第一列, 0.06 在第一行. 在表 1 中与 1.5 同行, 与 0.06 同列处的数值 0.1182 即为 $\varphi(1.56)$. 在表 2 中与 1.5 同行, 与 0.06 同列处的数值 0.94062 为 $\Phi(1.56)$. 有时我们碰到给定 $\Phi(u)$ 的值(例如 0.875), 要查相应的 u 值. 这只需在表 2 中找到与 0.875 最接近的值 0.8749, 对应行的第一列为 1.1, 对应列的第一行为 0.05. 故找到相应的 $u = 1.15$, 即 $\Phi(1.15) = 0.875$.

为了便于排版, 表中采用了象 .0³1385, .9³2886 这种写法, 分别是 .0001385, .9992886 的缩写, 0³表示连续 3 个 0, 9³表示连续 3 个 9.

我们可以利用下列关系式, 借助表 2 得到一些常用的概率:

$$\left. \begin{aligned} P(0 \leq U < u) &= \Phi(u) - \frac{1}{2}, \\ P(U \geq u) &= \Phi(-u), \\ P(|U| \geq u) &= 2\Phi(-u), \\ P(|U| < u) &= 1 - 2\Phi(-u), \\ P(u_1 \leq U < u_2) &= \Phi(u_2) - \Phi(u_1). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

为了使用方便, 表 3 给出了满足 $P(|U| > u_\alpha) = \alpha$ [即 $P(|U| \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$] 的双侧分位数 u_α 的数值. α 值如同表 1, 以第一列第一行来表示, 查法与表 1 相同. 例如, $\alpha = 0.05$ 由表 3 查得 $u_{0.05} = 1.959964 \approx 1.96$.

在实际中, 我们常见的情况是: 随机变数 X 具有均值为 μ , 标准差为 σ 的正态分布, 记为 $N(\mu, \sigma^2)$. 如何用表 1, 2 计算 $N(\mu, \sigma^2)$ 的密度函数和分布函数呢? 这只需令

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

此时 U 具有 $N(0,1)$ 分布, 则 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad (4)$$

而 X 的分布函数为

$$P(X < x) = P\left(U < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad (5)$$

在给定 μ 和 σ 后, 先计算 $\frac{x-\mu}{\sigma}$, 再从表 1, 2 可查到 $\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ 及 $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, 再用 (4), (5) 式即可得到我们所求之值。

例 1 正态分布实例.

某化工厂生产某种化学纤维, 从一批产品中抽取了 1050 根纤维, 测量其强力. 它的结果列于下表第二, 四列, 第四列观测个数 n_i 表示 1050 根纤维中有 n_i 根纤维的强力在 (a_i, a_{i+1}) 区间内. 问纤维强力是否遵从正态分布?

组序 i	纤维强力 区间 (克) $a_i \sim a_{i+1}$	组中值 $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$	观测个数 n_i	$\frac{a_i - \bar{x}}{s}$ u_i	正态分布 $\Phi(u_i)$	频率 n_i/n	正态概率 $\Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i)$	正态密度 $\varphi(u_i)$
1	3.05~3.45	3.25	18	-2.48	0.0066	0.0171	0.0096	0.0184
2	3.45~3.85	3.65	22	-2.14	0.0162	0.0210	0.0190	0.0404
3	3.85~4.25	4.05	36	-1.81	0.0352	0.0343	0.0356	0.0775
4	4.25~4.65	4.45	62	-1.47	0.0708	0.0590	0.0532	0.135
5	4.65~5.05	4.85	87	-1.13	0.129	0.0829	0.083	0.211
6	5.05~5.45	5.25	118	-0.80	0.212	0.112	0.111	0.290
7	5.45~5.85	5.65	131	-0.46	0.323	0.125	0.125	0.359
8	5.85~6.25	6.05	140	-0.13	0.448	0.133	0.135	0.396
9	6.25~6.65	6.45	132	0.21	0.583	0.126	0.126	0.390
10	6.65~7.05	6.85	105	0.55	0.709	0.100	0.102	0.343
11	7.05~7.45	7.25	83	0.88	0.811	0.0791	0.078	0.271
12	7.45~7.85	7.65	55	1.22	0.839	0.0524	0.052	0.190
13	7.85~8.25	8.05	30	1.56	0.941	0.0286	0.030	0.118
14	8.25~8.65	8.45	18	1.89	0.971	0.0171	0.016	0.0669
15	8.65~9.05	8.85	8	2.23	0.987	0.0076	0.0079	0.0332
16	9.05~9.45	9.25	3	2.57	0.9949	0.0029	0.0033	0.0147
17	9.45~9.85	9.65	1	2.91	0.9982	0.00095	0.0012	0.0058
18	9.85~10.25	10.05	1	3.24	0.9994	0.00095	0.0006*	0.0021

* 令 $\Phi(u_{n+1}) = 1$

表中 \bar{x} 是 1050 根纤维的平均值:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \frac{1}{1050} (18 \times 3.25 + 22 \times 3.65 + \cdots + 1 \times 10.05) \\ &= 5.994, \end{aligned}$$

此处 n 为观测个数, 称为样本的大小, k 为组数, n_i, x_i 分别为表中第 i 个区间的观测个数及组中值.

表中 s 为标准差 σ 的估计, 由下面的公式给出:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2} \approx 1.19.$$

令 X 表示纤维的强力, 如果它服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则有

$$\begin{aligned} P(a_i \leq X < a_{i+1}) &= P\left(\frac{a_i - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{a_{i+1} - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a_i - \mu}{\sigma} \leq U < \frac{a_{i+1} - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a_{i+1} - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_i - \mu}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

但是 μ, σ 未知, 因为 n 较大, 可分别用 \bar{x}, s 来代替, 故得

$$\begin{aligned} P(a_i \leq X < a_{i+1}) &\approx \Phi\left(\frac{a_{i+1} - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}}{s}\right) \\ &= \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i), \end{aligned}$$

此处 $u_i = \frac{a_i - \bar{x}}{s}$ 列于表中第五列, $\Phi(u_i)$ 的值可从表 2 查得, 其结果列于第六列. 第八列则列出 $\Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i)$ 的值. 拿它与第七列频率比较相差无几, 这就证明我们的设想是符合实际的.

表中最后一列是 $\varphi(u_i)$ 的值, 从表 1 查得, 它表示 $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$ 在 u_i 处的概率密度. 图 1 表示直方图与 $\varphi(u)$ 的关系. 这个图从另一个角度说明纤维强力服从正态分布的假定是合理的.

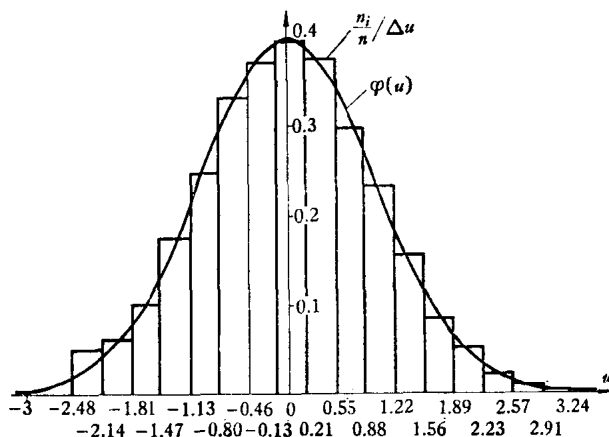


图 1

注意: 在作直方图时, 必须把频率除以区间长度 $\Delta u = u_{i+1} - u_i$, 即用 $\frac{n_i}{n} / \Delta u$ 作为纵坐标. 这样, 每一个长方块的面积才等于该组的频率, 才能和密度曲线比较.

例 2 求 μ 的置信区间.

已知某产品质量特征 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 且标准差 σ 已知. 我们要估计今后生产中, 这种产品质量的均值大致在什么范围内, 即求给定置信度为 $1 - \alpha$ ($1 - \alpha$ 的把握) 的置信区间.

用 \bar{x} 表示 n 次观测的样本均值, 则

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}},$$

遵从标准正态分布 $N(0,1)$, 从而

$$\begin{aligned}
 1-\alpha &= P(|U| < u_\alpha) = P\left(\left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < u_\alpha\right) \\
 &= P\left(-\frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{x} < \mu < \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right), \quad (6)
 \end{aligned}$$

于是, 对于置信度为 $1-\alpha$, μ 的置信区间为

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}}\right). \quad (7)$$

例如, 已知某种化学纤维强力遵从正态分布, $\sigma=1.19$, 现取一个样本, $n=100$, 其均值 $\bar{x}=6.35$ (克), 对置信度 $1-\alpha=95\%$ (即 $\alpha=0.05$), 从表 3 查得 $u_{0.05}=1.96$, 故对置信度 95% , 纤维强力均值 μ 的置信区间为

$$\begin{aligned}
 &\left(6.35 - \frac{1.19 \times 1.96}{\sqrt{100}}, 6.35 + \frac{1.19 \times 1.96}{\sqrt{100}}\right) \\
 &\approx (6.12, 6.58),
 \end{aligned}$$

就是说, 纤维强力的均值大致在 6.12 克到 6.58 克之间。

例 3 关于 μ 的假设检验。

已知 X 遵从正态分布, 其标准差 σ 已知, 要求通过抽取大小为 n 的样本, 检验 $\mu=\mu_0$, $\mu \leq \mu_0$ 或 $\mu \geq \mu_0$ 这些假设。这种问题在实际中也是经常碰到的。例如:

(1) 已知某厂生产的某种化学纤维纤度服从正态分布, 且 $\sigma=0.04$, 某天测得 25 根纤维的纤度, 其样本均值 $\bar{x}=1.39$ 。问与原设计的标准均值 1.40 是否有显著差异?

(2) 象例 2 所举的纤维强力的例子, 原设计的平均强力标准值为 6(克), 现经改进工艺后, 某天测得 100 个强力数据, 其样本均值为 6.35。问均值的提高是工艺改变的结果, 还纯粹是随机波动?

(3) 某纱厂要求检验棉纱的缩水率是否比要求的标准值 μ_0 更高?

统计检验是这样一种程序: 对于假设 H_0 , 首先确定 n 维样本空间的一个区域, 称为否定域, 再随机地抽取一个大小为 n 的样本, 如果它落入否定域中, 则我们否定假设 H_0 , 如果它不落入否定域, 则不否定假设。

因为我们是通过对一个样本的观测来作关于总体特性的推断, 自然有可能发生错误。譬如, 当 H_0 是真的, 抽取的样本仍有可能落入否定域中, 从而 H_0 被否定。我们在选取否定域的时候, 要求发生这种错误的概率不超过一个预先给定的较小的正数 α , 这个数称为显著性水平, 它的数值须依据实际情况确定, 一般取 $\alpha=1\%, 5\%, 10\%$ 等。

现在具体讨论上述关于 μ 的检验问题。

首先检验假设 $H_0: \mu=\mu_0$, 在此假设下,

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}},$$

遵从 $N(0,1)$ 分布, 其中 \bar{x} 为样本均值。很自然地, 可以设想, 如果 H_0 成立, \bar{x} 离 μ_0 不能太大, 从而可选择

$$|U| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > u \quad (8)$$

为否定域,对于给定的显著性水平 α ,其中 u 可由 $P(|U|>u)=\alpha$ 来确定,即 $u=u_\alpha$, 它从表 3 可查到.

同样地,对于显著性水平 α 检验 $H_0: \mu \leq \mu_0$ 的否定域为

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > u_{2\alpha}, \quad (9)$$

检验 $H_0: \mu \geq \mu_0$ 的否定域为

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -u_{2\alpha}.$$

现在回到前面的例子(1),(2).

(1) 即检验 $H_0: \mu = 1.40$, 给定 $\alpha = 0.05$, 查表 3 得 $u_{0.05} = 1.96$. 因为

$$\left| \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{1.39-1.40}{0.04/\sqrt{25}} \right| \approx 1.25 < 1.96,$$

故不能否定 H_0 即生产符合设计要求这一假设.

(2) 这个问题就是看,能否根据抽样结果否定 $\mu \leq 6$ 这一假设. 否定了,说明有改进. 此时我们给定 $\alpha = 0.05$, 查表 3 得 $u_{2\alpha} = u_{0.1} = 1.645$, 而

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{6.35-6}{1.19/\sqrt{100}} \approx 2.94 > 1.645,$$

从而否定了 $\mu \leq 6$ 这一假设,说明工艺改革是有效果的.

例 4 对比检验.

假如 X_1, X_2 是两个独立随机变数,皆服从正态分布,且标准差 σ_1, σ_2 已知,往往要求检验它们的均值 μ_1, μ_2 是否相等或一个比另一个大,譬如,曾经统计了相同条件下生产的 50 炉铁水,其平均含碳量为 $\bar{x}_1 = 4.553$, 标准差 $\sigma = 0.107$. 现在生产了 10 炉铁水,其含碳量均值 $\bar{x}_2 = 4.516$. 如果生产条件与过去大致相同,可认为 σ 未变,问均值有否变化?

假定分别从 X_1, X_2 抽取大小分别为 n_1, n_2 的样本,其样本均值分别为 \bar{x}_1, \bar{x}_2 . 令

$$U = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{n_2\sigma_1^2 + n_1\sigma_2^2}} \cdot \sqrt{n_1n_2}, \quad \text{当 } \sigma_1 \neq \sigma_2 \text{ 时,}$$

$$U = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1 + n_2}}, \quad \text{当 } \sigma_1 = \sigma_2 \text{ 时.}$$

如果 $\mu_1 = \mu_2$, 则 U 服从正态分布 $N(0,1)$. 很显然要检验 μ_1, μ_2 是否相等,即检验 U 的均值是否为零,因此按例 3 的办法可构造显著性水平为 α 的否定域如下.

(1) 检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 的否定域为

$$\left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{n_2\sigma_1^2 + n_1\sigma_2^2}} \cdot \sqrt{n_1n_2} \right| > u_\alpha. \quad (10)$$

(2) 检验假设 $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ 的否定域为

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{n_2\sigma_1^2 + n_1\sigma_2^2}} \cdot \sqrt{n_1n_2} > u_{2\alpha}. \quad (11)$$

(3) 检验假设 $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ 的否定域为

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{n_2\sigma_1^2 + n_1\sigma_2^2}} \cdot \sqrt{n_1n_2} < -u_{2\alpha}. \quad (12)$$

在上面提到的铁水含碳量的例子中, 给定 $\alpha=0.05$,

$$\left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_2\sigma_1^2 + n_1\sigma_2^2}{n_1n_2}}} \sqrt{n_1n_2} \right| = \left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1 + n_2}} \right| = \frac{4.553 - 4.516}{0.107} \sqrt{\frac{50 \times 10}{50 + 10}}$$

$$\approx 0.998 < u_{0.05} = 1.96,$$

这就不能否定 $\mu_1 = \mu_2$ 的假设, 即不能认为现在生产的含碳量比过去的有明显变化。

表 4—5

统计量 χ^2 由

$$\chi_f^2 = \sum_{k=1}^f U_k^2$$

所确定, 此处 U_1, U_2, \dots, U_f 是 f 个相互独立, 服从相同分布 $N(0, 1)$ 的随机变数。它的密度函数为

$$p_f(z) = \begin{cases} 0, & \text{当 } z \leq 0 \text{ 时,} \\ \frac{1}{2^{\frac{f}{2}} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} z^{\frac{f}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}, & \text{当 } z > 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (13)$$

参数 f 称为 χ^2 分布的自由度。

表 4 对 $f, j=1, 2, \dots, 30$, 给出了概率

$$P(\chi_f^2 > j) = \int_j^{\infty} p_f(z) dz.$$

表 5 对自由度 $f=1, 2, \dots, 30$ 和不同的 α , 给出了满足关系式

$$P(\chi_f^2 > \chi_\alpha^2) = \int_{\chi_\alpha^2}^{\infty} p_f(z) dz = \alpha$$

的上侧分位数 χ_α^2 的数值。

对于 $f > 30$ 的情况, 因为 $\sqrt{2\chi_f^2} - \sqrt{2f-1}$ 渐近于正态分布 $N(0, 1)$, 可用下列公式计算 χ_α^2 :

$$\chi_\alpha^2 = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sqrt{2f-1} + u_{2\alpha})^2, & \text{当 } \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}(\sqrt{2f-1} - u_{2(1-\alpha)})^2, & \text{当 } \alpha \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (14)$$

或用更精确一点的公式计算:

$$\chi_\alpha^2 = \begin{cases} f\left(1 - \frac{2}{9f} + \sqrt{\frac{2}{9f}} u_{2\alpha}\right)^3, & \text{当 } \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ f\left(1 - \frac{2}{9f} - \sqrt{\frac{2}{9f}} u_{2(1-\alpha)}\right)^3, & \text{当 } \alpha \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (15)$$

此处 $u_{2\alpha}, u_{2(1-\alpha)}$ 可从表 3 查到。

χ^2 分布表主要有下面两种用途:

(一) 当随机变数 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 时, 可通过 n 次独立观测 x_1, x_2, \dots, x_n , 来估计 σ 的置信区间或作假设检验。例如检验迫击炮纵向(横向)的概率偏差是否符合设

计要求,估计纵向(横向)概率偏差的大致范围,或者估计仪器的随机误差范围等。

我们知道

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{\sigma^2} \bar{x}^2$$

服从 $f=n-1$ 个自由度的 χ^2 分布。

若给定显著性水平 α , 检验 $H_0: \sigma \leq \sigma_0$ 的否定域为

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > \chi_{\alpha}^2 \quad (16)$$

给定置信度 $1-\alpha$, 则 σ 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}}, \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}} \right) \quad (17)$$

给定置信度 $1-\alpha$, 则 σ 的置信上界为

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\chi_{1-\alpha}^2}} \quad (18)$$

(二) 对随机变数 X 作 n 次观测, 检验 X 是否服从某一给定的分布 $F(x)$ 。我们把 X 可能取值的范围分为 r 个区域, 用 n_i 表示落在第 i 区域的观测个数, π_i 表示第 i 区域由给定 $F(x)$ 所确定的概率, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(n_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i} \quad (19)$$

渐近 $r-1$ 个自由度的 χ^2 分布。

如果仅知道 $F(x)$ 的类型, 它包含 m 个未知参数, 这些参数用样本的极大似然估计代替, 则 χ^2 渐近 $r-m-1$ 个自由度的 χ^2 分布。故这种检验对给定显著性水平 α , 它的否定域为

$$\sum_{i=1}^r \frac{(n_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i} > \chi_{\alpha}^2 \quad (20)$$

例 1 新设计某种化学天平, 要求它的误差不超过 $\frac{1}{10}$ 毫克, 现拿它与标准天平比较。

得到 10 个误差数据 x_1, \dots, x_{10} , $\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 0.0081$, 问是否满足设计要求?

我们不妨假定误差服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 如果精度要求随机误差 3σ 不超过 $\frac{1}{10}$ 毫克 (系统误差可调)。问题就化为检验假设 $H_0: \sigma \leq \frac{1}{30}$ 。若给定显著性水平 $\alpha=0.05$, 从表 5 自由度 $f=9$ 的一行查得 $\chi_{0.05}^2 = 16.919$, 而

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} = \frac{0.0081}{(1/30)^2} = 7.29 < 16.919$$

于是没有理由认为新设计的天平不合设计要求。

对于置信度 90%，按(17)式 σ 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{0.0081}{\chi_{0.05}^2}}, \sqrt{\frac{0.0081}{\chi_{0.95}^2}} \right) = \left(\frac{0.09}{\sqrt{16.919}}, \frac{0.09}{\sqrt{3.325}} \right) \approx (0.0219, 0.0493),$$

σ 的置信上界为

$$\sqrt{\frac{0.0081}{\chi_{0.9}^2}} = \frac{0.09}{\sqrt{4.168}} \approx 0.0441.$$

例 2 某钢铁厂在正常生产条件下，测得 120 炉铁水含碳量如下(%)：

4.59	4.44	4.53	4.53	4.72	4.72	4.57	4.39
4.62	4.57	4.62	4.57	4.53	4.57	4.66	4.40
4.40	4.61	4.55	4.60	4.53	4.59	4.50	4.60
4.57	4.57	4.56	4.47	4.52	4.55	4.73	4.67
4.72	4.77	4.52	4.44	4.42	4.59	4.57	4.57
4.64	4.67	4.59	4.67	4.60	4.35	4.43	4.60
4.60	4.52	4.84	4.79	4.43	4.61	4.78	4.61
4.23	4.57	4.73	4.51	4.70	4.73	4.63	4.62
4.43	4.57	4.53	4.52	4.50	4.50	4.43	4.66
4.40	4.53	4.30	4.43	4.54	4.50	4.47	4.47
4.43	4.42	4.39	4.33	4.50	4.51	4.55	4.51
4.49	4.65	4.63	4.60	4.53	4.69	4.57	4.42
4.49	4.55	4.52	4.36	4.50	4.37	4.54	4.54
4.42	4.43	4.53	4.60	4.57	4.60	4.60	4.44
4.57	4.54	4.56	4.41	4.52	4.50	4.63	4.50

要求检验铁水含碳量 X 是否遵从正态分布。

令 x_i 表示第 i 炉铁水含碳量，

$$\bar{x} = \frac{1}{120} \sum_{i=1}^{120} x_i = 4.551,$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{120-1} \sum_{i=1}^{120} (x_i - \bar{x})^2} = 0.107,$$

可作为 μ, σ 的估计。现将 120 个数据同 $N(4.551, 0.107^2)$ 比较。先把 120 个数据分成 9 组， n_i 表 120 个数据落在第 i 组的个数。

i	$a_i \sim a_{i+1}$	n_i	$\pi_i = \Phi\left(\frac{a_{i+1} - 4.551}{0.107}\right) - \Phi\left(\frac{a_i - 4.551}{0.107}\right)$	$120\pi_i$	$\frac{(n_i - 120\pi_i)^2}{120\pi_i}$
1	$-\infty \sim 4.375$	5	0.0505	6.06	0.185
2	$4.375 \sim 4.425$	10	0.06395	8.27	0.362
3	$4.425 \sim 4.475$	9	0.1199	14.39	2.019
4	$4.475 \sim 4.525$	23	0.1663	19.96	0.463
5	$4.525 \sim 4.575$	29	0.1819	21.83	2.355
6	$4.575 \sim 4.625$	21	0.1678	20.14	0.037
7	$4.625 \sim 4.675$	3	0.1221	14.65	3.019
8	$4.675 \sim 4.725$	7	0.07038	8.45	0.249
9	$4.725 \sim \infty$	8	0.03262	6.31	0.453

上表第四列由表 2 得到。按照(二)的叙述,当抽样次数 n 足够大时,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(n_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i},$$

渐近地遵从 $r-m-1$ 个自由度 χ^2 分布。因为被检验的正态分布包含两个未知参数 μ, σ , 它们分别用其估计量 \bar{x}, s 代替,故 $m=2$ 。 π_i 按照定义为 $\Phi\left(\frac{a_{i+1}-\bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a_i-\bar{x}}{s}\right)$ 。现已算出列在上表第四列,易得

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^9 \frac{(n_i - 120\pi_i)^2}{120\pi_i} = 9.884,$$

比从表 5 查得的 $\chi_{0.05}^2 = 12.592$ 要小,按照公式(20), χ^2 未落在否定域内,故不能否定假设的正确性。

表 6-7

统计量 t 由

$$t = \frac{U}{\sqrt{\chi^2/f}} \quad (21)$$

所确定,此处 U 遵从标准正态分布 $N(0,1)$, χ^2 遵从具有 f 个自由度的 χ^2 分布,而且 U 与 χ^2 相互独立。我们称 f 为统计量 t 的自由度。

在实际问题中,常碰到的是下列形式,

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n}, \quad (22)$$

此处 \bar{x}, s 是服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的 n 个独立观测的样本均值和样本标准差

$$\left(s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right).$$

因为 $U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ 服从 $N(0,1)$ 分布,而 $(n-1)s^2/\sigma^2$ 具有 $n-1$ 个自由度的 χ^2 分布,且与 U 独立,因此由(22)式所确定的统计量是自由度为 $n-1$ 的 t 统计量。

自由度为 f 的 t 统计量的密度函数如下:

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{f} B\left(\frac{1}{2}, \frac{f}{2}\right)} \cdot \frac{1}{(1+t^2/f)^{(f+1)/2}}, \quad (23)$$

此处

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{f}{2}\right) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{f-2}{2}} dx.$$

表 6 对于 x 从 0 到 6, 和不同的自由度 f , 给出了 $P(t < x)$ 的数值。当 $x < 0$ 时, 因为

$$P(t < x) = 1 - P(t < -x), \quad (24)$$

$P(t < -x)$ 可从表中查到,从而得到 $P(t < x)$ 的值。

表 7 对于自由度 $f = 1, 2, \dots$, 和各种 α , 给出了满足

$$P(|t| > t_\alpha) = 2 \int_{t_\alpha}^{\infty} p(t) dt = \alpha$$

的双侧分位数 t_α 的数值.

因为 $p(t)$ 的对称性, 我们有

$$P(t < -t_\alpha) = P(t > t_\alpha) = \frac{\alpha}{2}. \quad (25)$$

有时给定 α , 欲求满足

$$P(t < t'(\alpha)) = \alpha \text{ 或 } P(t > t''(\alpha)) = \alpha$$

的单侧分位数 $t'(\alpha)$ 或 $t''(\alpha)$, 利用式(25)知道,

$$t'(\alpha) = \begin{cases} -t_{2\alpha}, & \text{当 } \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ 时,} \\ t_{2(1-\alpha)}, & \text{当 } \alpha > \frac{1}{2} \text{ 时,} \end{cases}$$

$$t''(\alpha) = \begin{cases} t_{2\alpha}, & \text{当 } \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ 时,} \\ -t_{2(1-\alpha)}, & \text{当 } \alpha > \frac{1}{2} \text{ 时,} \end{cases}$$

这从表 7 可查到.

当自由度 f 足够大时, 例如 $f > 30$, t 分布很近似正态分布 $N(0, 1)$, 此时可用 u_α 代替 t_α , 因此, 可借用正态分布表.

t 分布是由于正态分布中标准差 σ 未知, 而用样本标准差 s 代替所引出的. 它的用途和处理方法同正态分布类似, 有下面三种主要用途:

(一) 均值 μ 的假设检验.

假设对服从正态分布的随机变数作 n 次独立观测, 得结果 x_1, x_2, \dots, x_n . 令

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s},$$

此处

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \mu_0 \text{ 为下面的假设中所给定的常数.}$$

对给定的显著性水平 α :

1) 检验假设 $H_0: \mu = \mu_0$ 的否定域为

$$|t| > t_\alpha. \quad (26)$$

2) 检验假设 $H_0: \mu \geq \mu_0$ 的否定域为

$$t < -t_{2\alpha}. \quad (27)$$

3) 检验假设 $H_0: \mu \leq \mu_0$ 的否定域为

$$t > t_{2\alpha}. \quad (28)$$

(二) 给定置信度 $1-\alpha$, 则 μ 的置信区间为

$$\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha \right). \quad (29)$$

(三) 比较两个正态分布的均值 μ_1, μ_2 , 如果它们的标准差 $\sigma_1 = \sigma_2$, 分别从两个正态分布独立作 n_1, n_2 次观测, 令 \bar{x}, \bar{y} 分别表示它们的样本均值, s_1^2, s_2^2 分别表示样本方差:

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2-1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_i - \bar{x})^2.$$

我们建立统计量

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}, \quad (30)$$

当 $n_1 = n_2$ 时,

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(s_1^2 + s_2^2)}} \sqrt{n_1}, \quad (31)$$

于是 t 服从 $n_1 + n_2 - 2$ 个自由度的 t 分布,可借助于它来确定检验下列假设的否定域。

对于显著性水平 α :

1) 检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, 否定域为

$$|t| > t_\alpha \quad (32)$$

2) 检验假设 $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$, 否定域为

$$t < -t_{2\alpha}. \quad (33)$$

3) 检验假设 $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$, 否定域为

$$t > t_{2\alpha}. \quad (34)$$

例 1 某医院用中药青木香治疗高血压,记录了 50 例治疗前与治疗后舒张压数据之差,其均值为 -16.28 , 标准差为 $s = 10.58$,问青木香治疗高血压是否有效?

根据经验可认为舒张压之差服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,问题成为检验均值 μ 是否大于等于零($\mu_0 = 0$)。由(22)式,以 $\bar{x} = -16.28, s = 10.58, \mu_0 = 0$ 代入即得

$$t = \frac{-16.28 \times \sqrt{50}}{10.58} = -10.85$$

给定显著性水平 $\alpha = 0.05, 0.01$,由表 7,查自由度 $f = 49$,表上没有,但有 $f = 40, 60$ 的值,

可近似地用这两个自由度的 $t_{0.1} = \begin{cases} 1.684, f=40, \\ 1.671, f=60, \end{cases} t_{0.02} = \begin{cases} 2.423, f=40, \\ 2.390, f=60, \end{cases}$ 插值.故当自由度 $f = 49$ 时,可近似地认为

$$t_{0.1} = 1.671 + \frac{49-40}{60-40}(1.684 - 1.671) = 1.677,$$

$$t_{0.02} = 2.390 + \frac{49-40}{60-40}(2.423 - 2.390) = 2.405,$$

而 $t = -10.85$ 比 $-t_{0.1}, -t_{0.02}(f = 49)$ 小.落在否定域(27)式内,否定了没有疗效的假设。

我们还可以进一步弄清,这种青木香治疗高血压使舒张压大致降低了多少.即求 μ 的置信区间.如果给定置信度 $1 - \alpha = 95\%$.如同上面一样查得自由度 49 时的 $t_\alpha = t_{0.05} \approx 2.01$,代入(29)式得 μ 的置信区间为

$$\left(-16.28 - \frac{10.58}{\sqrt{50}} \times 2.01, -16.28 + \frac{10.58}{\sqrt{50}} \times 2.01 \right) \approx (-19.29, -13.27),$$

这说明经青木香治疗高血压,有 95%把握说舒张压的平均降低量在 13.27 至 19.29 之间。

例 2 某物在化学处理前、后的含脂率如下:

处 理 前	0.19	0.13	0.21	0.30	0.66	0.42	0.08	0.12	0.30	0.27
处 理 后	0.15	0.13	0.00	0.07	0.24	0.24	0.19	0.04	0.08	0.20
	0.12									

问处理是否降低了含脂率?

我们不妨认为处理前、后某物含脂率分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$, 并假设处理后含脂率没有降低, 即 $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$.

处理前 $\bar{x} = 0.273$, $s_1^2 = 0.02811$,

处理后 $\bar{y} = 0.135$, $s_2^2 = 0.00715$.

按(30)式计算得

$$t = \frac{0.237 - 0.135}{\sqrt{9 \times 0.02811 + 10 \times 0.00715}} \sqrt{\frac{10 \times 11 \times 19}{10 + 11}} \approx 2.41.$$

若取 $\alpha = 0.05$, 从表 7 对自由度 $f = 10 + 11 - 2 = 19$, 查得 $t_{2\alpha} = t_{0.1} = 1.729$, 从而 $t = 2.41 > t_{2\alpha} = 1.729$. 落入否定域(34)式中, 故否定了假设, 这说明化学处理降低了平均含脂率.

表 8-9

统计量 F 由

$$F_{f_1, f_2} = \frac{\chi_{f_1}^2 / f_1}{\chi_{f_2}^2 / f_2} \quad (35)$$

确定, 这里 $\chi_{f_1}^2, \chi_{f_2}^2$ 是彼此独立, 自由度分别为 f_1, f_2 的 χ^2 统计量. f_1, f_2 被称为 F 统计量的自由度.

F_{f_1, f_2} 的概率密度为

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{f_2}{2}\right)} \cdot f_1^{f_1/2} f_2^{f_2/2} \cdot \frac{x^{\frac{f_1}{2}-1}}{(f_2 + f_1 x)^{\frac{f_1 + f_2}{2}}}, \quad x \geq 0, \quad (36)$$

这里

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

表 8 对于 $f_1, f_2 = 1, 2, \dots$ 和 $\alpha = 0.10, 0.05, 0.01$ 的组合给出了满足下列关系的临界值 F_α (或写明自由度, 记为 $F_{f_1, f_2}(\alpha)$):

$$P[F_{f_1, f_2} > F_\alpha] = \alpha. \quad (37)$$

当 $f_2 \rightarrow \infty$ 时, $\chi_{f_2}^2 / f_2$ 依概率收敛于 1, 故统计量 $f_1 F_{f_1, f_2}$ 依概率收敛于自由度为 f_1 的 χ^2 统计量. 同理, 当 $f_1 \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{f_2 F_{f_1, f_2}}$ 依概率收敛于自由度为 f_2 的 χ^2 统计量. 表 8 的最后一列和最后一行就是依此原理计算出来的.

表 8 的主要用途有下列两个方面:

(1) 比较两个正态总体的标准差.

设有两个正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 要求比较两总体的标准差 σ_1 和 σ_2 . 我们分别独立地抽取样本 x_1, \dots, x_{n_1} 和 y_1, \dots, y_{n_2} , 计算出样本方差

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2$$

和

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{y})^2.$$

我们知道 $(n_1 - 1)s_1^2$ 和 $(n_2 - 1)s_2^2$ 分别遵从 $n_1 - 1$ 和 $n_2 - 1$ 个自由度的 χ^2 分布, 所以当 $\sigma_1 = \sigma_2$ 时, 统计量

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (38)$$

遵从自由度 $n_1 - 1, n_2 - 1$ 的 F 分布. 从而对于显著性水平 α 检验假设 $H_0: \sigma_1 \leq \sigma_2$ 的否定域为

$$F > F_{(\alpha)}, \quad (39)$$

检验假设 $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ 的否定域为

$$F > F_{(\frac{\alpha}{2})} \text{ 或 } F < F_{(1-\frac{\alpha}{2})}, \quad (40)$$

其中 $F_{(1-\alpha)}$ 可这样来确定:

$$F_{f_1, f_2}(1-\alpha) = \frac{1}{F_{f_2, f_1}(\alpha)}. \quad (41)$$

(2) 比较多个总体的均值.

设 $X_i (i=1, \dots, k)$ 为遵从 $N(\mu_i, \sigma^2)$ 的独立随机变数, 现在要求对于显著性水平 α 检验假设 $H_0: \mu_1 = \dots = \mu_k$.

对每个 X_i 作 n 次观测, 得 x_{i1}, \dots, x_{in} , 我们用

$$s^2 = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad (42)$$

来估计方差 σ^2 , 其中 $\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}$, 而

$$s'^2 = \frac{n}{k-1} \sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \quad (43)$$

反映了均值的差异, 其中 $\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i$. 如果假设 H_0 成立, 则

$$F = \frac{s'^2}{s^2} \quad (44)$$

遵从自由度 $f_1 = k - 1, f_2 = k(n - 1)$ 的 F 分布, 检验假设 H_0 的否定域为

$$F > F_{\alpha}. \quad (45)$$

例 1 我们设计了一种测量仪器, 用来测量某一物体 11 次, 得 11 个数据. 用进口的同类测量仪器重复测量同一物体, 也得 11 个数据. 两样本的方差分别为

$$s_1^2 = 1.263, s_2^2 = 3.789.$$

问对显著性水平 $\alpha = 0.05$, 设计的仪器是否比进口仪器显著地好?

我们假定两种仪器的测量结果分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 问题就化为检验假设 $H_0: \sigma_2^2 \leq \sigma_1^2$. 于是否定域为

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} > F_{0.05},$$

对自由度 10, 10 查表 8, 得 $F_{0.05} = 2.98$, 而 $F = \frac{3.789}{1.263} = 3$ 落在否定域内, 否定了假设

H_0 , 因此 σ_1 显著地比 σ_2 小, 说明我们自己设计的仪器比国外进口的要好。

例 2 用 4 种不同型号的轮廓仪对某种机器零件的七级光洁表面进行检查, 每种仪器分别在同一表面上反复测量 4 次, 测量结果如下表:

仪器型号 测量次序	1	2	3	4
1	-0.21	0.16	0.10	0.12
2	-0.06	0.08	-0.07	-0.04
3	-0.17	0.03	0.15	-0.02
4	-0.14	0.11	-0.02	0.11

问所用仪器型号对测量结果有无显著的影响?

我们假定第 i 种仪器的测量结果遵从正态分布 $N(\mu_i, \sigma^2)$, 于是问题就化为检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$. 由公式 (44) 算出 $F = 7.21$, 从表 8 查得 $F_{3,12}(0.01) = 5.95$, 对于显著性水平 $\alpha = 0.01$, F 落入否定域 (45) 式中, 否定了假设 H_0 , 说明所用仪器型号对测量结果有显著的影响。

在表 1—3 的说明中, 我们曾谈到统计检验有可能犯错误。当 H_0 成立时, 检验结果可能否定 H_0 ; 当 H_0 不成立时, 检验结果也可能接收 H_0 。前一种错误叫做“第一类错误”, 后一种叫“第二类错误”。显著性水平 α 就是容许犯第一类错误的概率。显然, 衡量一个检验的好坏, 只考虑犯第一类错误的概率 α 是不够的, 我们还必须考虑犯第二类错误的概率 β 。这时 H_0 不成立, 必然是某一对立假设 H_1 成立, 因此 β 依赖于 H_1 , 或者说是被检验参数的函数, 我们称 $\pi = 1 - \beta$ 为检验的功效函数。

在比较多个总体均值的问题中, 如果 H_0 不成立, 即 μ_1, \dots, μ_k 不全相等, 这时 F 就不遵从 F 分布, 而是遵从所谓“非中心 F 分布”。我们仍把 f_1, f_2 叫做它的自由度, 而

$$\psi^2 = \frac{n}{k-1} \sum_{i=1}^k (\mu_i - \bar{\mu})^2 / \sigma^2 \quad (46)$$

称为它的非中心参数, 这里 $\bar{\mu} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu_i$, 它是在 F 的表达式 (44) 中, 分母 s^2 用 σ^2 代替, 分

子 s'^2 中的 x_i 用 μ_i 代替而得到的。不难证明, 由否定域 (45) 所确定的检验, 其功效函数除与 f_1, f_2 及 α 有关外, 只依赖于非中心参数 ψ^2 :

$$\pi(\mu_1, \dots, \mu_k) = \pi(\psi^2). \quad (47)$$

表 9 对不同的自由度 f_1, f_2 及 $\alpha = 0.05, 0.01$ 和 $\beta = 1 - \pi = 0.30, 0.20, 0.10$ 的各种组合给出了 ψ 的数值。下面的两个例子将说明本表的主要用途。

例 3 随机地把 20 只白鼠分为两组, 每组 10 只, 对其中一组注射某种药品, 而后检查两组白鼠淋巴球数的差异。当以显著性水平 0.05 对假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 作 F 检验时, 问以功效 0.90 能发现的差异 $|\mu_1 - \mu_2|$ 有多大?

这时, $\alpha = 0.05$, $\beta = 1 - 0.90 = 0.10$, $f_1 = 2 - 1 = 1$, $f_2 = 2(n - 1) = 18$, 从表 9 查得 $\psi = 3.43$, 由公式 (46) 得

$$\psi = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2}}, \quad (48)$$

从而

$$\frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sigma} = 3.43 \sqrt{\frac{2}{10}} \approx 1.53,$$

所以, 当以 $\alpha=0.05$ 来检验 H_0 时, 以功效 0.90 能发现差异 $|\mu_1 - \mu_2| = 1.53\sigma$, 即对于 1.53σ 的差异, 在 100 次中有 90 次能被发现。

例 4 在 k 个水平的单因素试验设计中,

$$\frac{\sigma_A}{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\mu_i - \bar{\mu})^2 / \sigma^2} \quad (49)$$

表示 k 个水平的平均差异. 现在 $k=3$, 我们以显著性水平 $\alpha=0.05$ 作 F 检验, 为了能以功效 0.90 发现平均差异 $\frac{\sigma_A}{\sigma} = 0.90$, 问各水平重复试验次数 n 应取多大?

这时, $\alpha=0.05, \beta=1-0.90=0.10, f_1=k-1=2, f_2=k \cdot (n-1)=3(n-1)$, 让 n 取不同的数值, 在表 9 中查出对应的 ψ , 再由 (46) 式得 $\frac{\sigma_A}{\sigma} = \left(\frac{\psi}{\sqrt{n}}\right)$, 然后取 $\frac{\sigma_A}{\sigma}$ 不超过 0.90 的最小的 n . 具体作时可先粗后细, 如先取 n 等于 3, 7, 11, 便知所要求的 n 在 7 与 11 之间, 再对 $n=8, 9$ 等计算 $\frac{\sigma_A}{\sigma}$, 得 $n=9$ 为所要求的重复试验次数 (参看右表)。

n	ψ	σ_A/σ
3	3.32	1.92
7	2.74	1.04
11	2.65	0.80
8	2.71	0.96
9	2.68	0.89

表 10

设从标准正态总体 $N(0, 1)$ 中独立随机抽取大小为 k 的样本 x_1, x_2, \dots, x_k , 令 $W = \max_{i,j} |x_i - x_j|$, χ^2 为与 W 独立, 自由度为 f 的 χ^2 统计量, 则称

$$q_{k,f} = \frac{W}{\sqrt{\chi^2/f}} \quad (50)$$

为 t -化极差. 表 10 给出了 $P(q_{k,f} \geq q_{k,f}(\alpha)) = \alpha$ 的上侧 α 分位数 $q_{k,f}(\alpha)$ 表, 通常称 q 表.

此表主要用于多重对比. 假如有 k 个相互独立的总体, 分别遵从 $N(\mu_i, \sigma^2)$ 分布, 若从每个总体独立随机抽取了大小为 n 的样本 $\{x_{ir}\}, i=1, \dots, k$. 用 F 检验可以检验均值之间是否有差异, 但并不指出那个或那几个均值与另一个或另外几个均值间有差异, 用 q 表及下列检验 (T 法) 则可回答这个问题.

令

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n x_{ir}, \quad s^2 = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^n (x_{ir} - \bar{x}_i)^2, \quad (51)$$

对 $\{\mu_i\}$ 的线性对比: $\theta = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i$ (其中 $\sum_{i=1}^k c_i = 0$) 的估计 $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^k c_i \bar{x}_i$, 则有

$$q_{k,f} = \max_{i,j} \frac{\sqrt{n} |(\bar{x}_i - \mu_i) - (\bar{x}_j - \mu_j)|}{s} = \max_{\substack{c_1, \dots, c_k \\ \sum_{i=1}^k c_i = 0}} \frac{\sqrt{n} |\hat{\theta} - \theta|}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| s} \quad (52)$$

为 t -化极差, 此处 $f = k(n-1)$.

对于置信度 $1-\alpha$, $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ 的置信区域为:

$$\left\{ (\mu_1, \dots, \mu_k) : \bar{x}_i - \bar{x}_j - \frac{q_{k,f}(\alpha)s}{\sqrt{n}} \leq \mu_i - \mu_j \leq \bar{x}_i - \bar{x}_j + \frac{q_{k,f}(\alpha)s}{\sqrt{n}}; i, j = 1, 2, \dots, k \right\} \quad (53)$$

对于显著性水平 α , 检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ 的否定域为

$$\max_{i,j} \frac{\sqrt{n} |\bar{x}_i - \bar{x}_j|}{s} > q_{k,f}(\alpha), \quad (54)$$

若 $\frac{\sqrt{n} |\bar{x}_i - \bar{x}_j|}{s} > q_{k,f}(\alpha)$ 或 $(\bar{x}_i - \bar{x}_j - \frac{q_{k,f}(\alpha)s}{\sqrt{n}}, \bar{x}_i - \bar{x}_j + \frac{q_{k,f}(\alpha)s}{\sqrt{n}})$ 不含 0, 不仅否定

假设 H_0 , 还表明 μ_i 与 μ_j 有显著差异. 从 (52), (54) 式还可看出, 若有线性对比 θ 的估计

$$\hat{\theta} \text{ 使 } \frac{\sqrt{n} |\hat{\theta}|}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| s} > q_{k,f}(\alpha) \text{ 或 } \left(\hat{\theta} - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| s q_{k,f}(\alpha), \hat{\theta} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| s q_{k,f}(\alpha) \right)$$

不含 0, 则以显著性水平 α 否定假设 H_0 , 并表明此 θ 显著不为 0.

例 设某因素有 $k=5$ 个水平, 每水平做 $n=4$ 个重复试验, 得到各水平的样本均值分别为 $\bar{x}_1=67, \bar{x}_2=58, \bar{x}_3=63, \bar{x}_4=51, \bar{x}_5=41$ 及 σ^2 的估计 $s^2=61$, 其自由度 $f=k(n-1)=15$. 问均值之间是否有显著性差异? 哪几个有差异? 均值 (μ_1, \dots, μ_5) 大致在什么范围?

这时不妨认为所要求条件成立, 由表 10 查得 $q_{5,15}(0.05)=4.37$, 于是 $q_{5,15}(0.05) \times \sqrt{\frac{61}{4}}=17$, 故对于 95% 置信度认为:

$$\begin{aligned} \mu_1 - \mu_2 & \text{ 在 } (67-58) \pm 17 = 9 \pm 17 = -8, 26 \text{ 之间,} \\ \mu_1 - \mu_3 & \text{ 在 } (67-63) \pm 17 = 4 \pm 17 = -13, 21 \text{ 之间,} \\ \mu_1 - \mu_4 & \text{ 在 } (67-51) \pm 17 = 16 \pm 17 = -1, 33 \text{ 之间,} \\ \mu_1 - \mu_5 & \text{ 在 } (67-41) \pm 17 = 26 \pm 17 = 9, 43 \text{ 之间,} \\ \mu_2 - \mu_3 & \text{ 在 } (58-63) \pm 17 = -5 \pm 17 = -22, 12 \text{ 之间,} \\ \mu_2 - \mu_4 & \text{ 在 } (58-51) \pm 17 = 7 \pm 17 = -10, 24 \text{ 之间,} \\ \mu_2 - \mu_5 & \text{ 在 } (58-41) \pm 17 = 17 \pm 17 = 0, 34 \text{ 之间,} \\ \mu_3 - \mu_4 & \text{ 在 } (63-51) \pm 17 = 12 \pm 17 = -5, 29 \text{ 之间,} \\ \mu_3 - \mu_5 & \text{ 在 } (63-41) \pm 17 = 22 \pm 17 = 5, 39 \text{ 之间,} \\ \mu_4 - \mu_5 & \text{ 在 } (51-41) \pm 17 = 10 \pm 17 = -7, 27 \text{ 之间.} \end{aligned}$$

因为 $\mu_1 - \mu_5, \mu_3 - \mu_5$ 所在区间不包含 0, 故对显著性水平 5% 可以认为均值间有显著性差异, 并表明 $\mu_1 \neq \mu_5, \mu_3 \neq \mu_5$.

表 11

假设有 k 个独立总体, 分别遵从 $N(\mu_i, \sigma^2)$ 分布, 令 $x_{i,r}, r=1, 2, \dots, n_i$ 表示从第 i

个总体独立随机抽取的样本。令 $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{r=1}^{n_i} x_{ir}$ 为 μ_i 的无偏估计, s^2 为 σ^2 的无偏估计, 且与

$\{\bar{x}_i\}$ 独立, 及 $\frac{fs^2}{\sigma^2}$ 遵从自由度为 f 的 χ^2 分布, 在实用中常取 $s^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1} \sum_{r=1}^{n_i} (x_{ir} - \bar{x}_i)^2$,

$$f = \sum_{i=1}^k n_i - k.$$

对于 $\{\mu_i\}$ 的线性对比 $\sum_{i=1}^k c_i \mu_i = \theta$ (其中 $\sum_{i=1}^k c_i = 0$) 的估计 $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^k c_i \bar{x}_i$, 则有

$$\max_{\substack{c_1, \dots, c_k \\ \sum_{i=1}^k c_i = 0}} \frac{|\hat{\theta} - \theta|}{\sqrt{\sum_{i=1}^k c_i^2 / n_i}} / s \quad (55)$$

的平方除以 $k-1$, 遵从自由度为 $k-1, f$ 的 F 分布。故它的上侧 α 分位数为

$$S_{k-1, f}(\alpha) = \sqrt{(k-1) F_{k-1, f}(\alpha)}, \quad (56)$$

此处 $F_{k-1, f}(\alpha)$ 是自由度为 $k-1, f$ 的 F 分布上侧 α 分位数。

本表给出了 $\alpha = 0.01, 0.05$ 的 $S_{k-1, f}(\alpha)$ 值。

此表可作多重对比的检验 (S 法), 它的意义和作用同前面的 q 表作 T 法检验完全相仿, 两者所不同的是: T 法只适用于各均值估计量是等方差的情况, 而 S 法对各均值估计量不等方差时也能应用, 但在两种方法均能使用时, 通常都用 T 法。

对于显著性水平 α , 检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$, 用 S 法与用 F 检验, 给出同一否定域, 可写为:

$$\max_{\substack{c_1, \dots, c_k \\ \sum_{i=1}^k c_i = 0}} \frac{|\hat{\theta}|}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k c_i^2 / n_i}} / s > S_{k-1, f}(\alpha), \quad (57)$$

这表明只要找到一线性对比 $\theta = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i$ 的估计 $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^k c_i \bar{x}_i$ 使得

$$\frac{|\hat{\theta}|}{\sqrt{\sum_{i=1}^k c_i^2 / n_i} \cdot s} > S_{k-1, f}(\alpha), \quad (58)$$

或者

$$\left(\hat{\theta} - \sqrt{\sum_{i=1}^k c_i^2 / n_i} \cdot s \cdot S_{k-1, f}(\alpha), \hat{\theta} + \sqrt{\sum_{i=1}^k c_i^2 / n_i} \cdot s \cdot S_{k-1, f}(\alpha) \right) \text{ 不含 } 0,$$

则否定假设 H_0 , 并表明此 θ 显著不为 0。

例 在一个 10 米厚度的沉积岩的剖面上, 每隔 2 米, 选取一块古生物标本, 每块制 4 个片子, 观察某古生物含量, 得如下数据:

深度 (米)	未知均值	观测值 % ($x_{i,r}$)				平均 \bar{x}_i
2	μ_1	61	60	63	60	61
4	μ_2	66	65	64	67	65.5
6	μ_3	67	64	63	65	66
8	μ_4	70	69	66	68	68.25
10	μ_5	69	70	71	68	69.5

$$s^2 = \frac{1}{3 \times 5} \sum_{i=1}^5 \sum_{r=1}^4 (x_{i,r} - \bar{x}_i)^2 = 2.32.$$

我们希望通过古生物来划分剖面层段，不妨假设前述条件满足。这里的问题只要求对比邻近的均值或几个邻近的均值与另外邻近的几个相邻均值对比。从表 11 查得 $S_{4,15}(0.05) = 3.50$ 。

$$\theta = \mu_1 - \mu_2: \quad \frac{\sqrt{4} |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{2} \cdot s} = \sqrt{\frac{2}{2.32}} \times 4.5 = 4.18 > S_{4,15}(0.05),$$

$$\mu_2 - \mu_3: \quad \frac{\sqrt{4} |\bar{x}_2 - \bar{x}_3|}{\sqrt{2} \cdot s} = \sqrt{\frac{2}{2.32}} \times 0.5 = 0.46,$$

$$\mu_3 - \mu_4: \quad \frac{\sqrt{4} |\bar{x}_3 - \bar{x}_4|}{\sqrt{2} \cdot s} = \sqrt{\frac{2}{2.32}} \times 2.25 = 2.09,$$

$$\mu_4 - \mu_5: \quad \frac{\sqrt{4} |\bar{x}_4 - \bar{x}_5|}{\sqrt{2} \cdot s} = \sqrt{\frac{2}{2.32}} \times 1.25 = 1.16,$$

$$\mu_4 - \frac{\mu_2 + \mu_3}{2}: \quad \frac{\sqrt{4} |\bar{x}_4 - \frac{1}{2}(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \cdot s} = \frac{2}{\sqrt{3.48}} \times 2.5 = 2.68,$$

$$\mu_5 - \frac{1}{3}(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4): \quad \frac{\sqrt{4} |\bar{x}_5 - \frac{1}{3}(\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)|}{\sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} \cdot s} = \sqrt{\frac{3}{2.32}} \times 2.92 = 3.32,$$

$$\begin{aligned} (\mu_2 + \mu_3) - (\mu_4 + \mu_5): \quad & \frac{\sqrt{4} |(\bar{x}_2 + \bar{x}_3) - (\bar{x}_4 + \bar{x}_5)|}{\sqrt{4} \cdot s} = \frac{6.25}{\sqrt{2.32}} \\ & = 4.10 > S_{4,15}(0.05). \end{aligned}$$

从上面计算的结果表明，否定了无层段的假设， μ_1 与 μ_2 有显著差异，故可在 2 米与 4 米间分层，4 米至 10 米之间单从两个邻近均值对比判别不出分层处，但对比 $\mu_2 + \mu_3$ 与 $\mu_4 + \mu_5$ 则发现有显著差异，故可在 6 米至 8 米之间分层。共可分三层。2 米处为一层，4—6 米为一层，8—10 米为一层。

表 12—13

两个随机变数 X, Y 的相关系数由

$$\rho = \frac{E(X - E(X))E(Y - E(Y))}{\sqrt{E(X - E(X))^2 E(Y - E(Y))^2}} \quad (59)$$

所确定。对 (X, Y) 作 n 次独立观测，得到 $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ，我们以

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (60)$$

作为 ρ 的估计。

在实际问题中经常碰到的是要判断两个随机变数是否相关,或者问是否 $\rho=0$ 。因此在 $\rho=0$ 时, r 的分布是我们关心的。如果 (X, Y) 遵从二维正态分布,当 $\rho=0$ 时, r 的概率密度函数为

$$\rho(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}. \quad (61)$$

对给定的显著性水平 α , 检验假设 $H_0: \rho=0$ 的否定域为

$$|r| > r_\alpha, \quad (62)$$

此处 r_α 由关系 $P(|r| > r_\alpha) = \alpha$ 确定。

表 11 对于不同的自由度 $f=n-2$ 及不同的 α 给出了 r_α , 它是根据 t 分布表来制定的。因为

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2} \quad (63)$$

遵从 $f=n-2$ 个自由度的 t 分布, 从而

$$r_\alpha = \frac{t_\alpha}{\sqrt{f+t_\alpha^2}}. \quad (64)$$

假如二维正态总体的相关系数 $\rho \neq 0$, 则

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \quad (65)$$

渐近正态分布 $N\left(\zeta + \frac{\rho}{2(n-1)}, \frac{1}{n-3}\right)$, 此处 $\zeta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}$, 当 $n \geq 20$ 近似程度是相当满意的, 表 12 给出了 r 与 Z (或 ρ 与 ζ) 对应的值, 它可用来检验关于 ρ 的假设。

检验假设 $H_0: \rho = \rho_0$ 的否定域为

$$\left| Z - \left(\zeta_0 + \frac{\rho_0}{2(n-1)} \right) \right| > \frac{u_\alpha}{\sqrt{n-3}}. \quad (66)$$

检验假设 $H_0: \rho \geq \rho_0$ 的否定域为

$$Z < -\frac{u_{2\alpha}}{\sqrt{n-3}} + \zeta_0 + \frac{\rho_0}{2(n-1)}. \quad (67)$$

此处 α 为显著性水平, u_α 及 $u_{2\alpha}$ 查表 3 可得。

例 1 某厂查找质量事故, 须考察纤维拉伸倍数与电流频率 H_s 的关系, 共测得 18 个数据。根据过去的经验, 这两个量在一定条件下遵从二维正态分布。由公式 (60) 已算得相关系数 ρ 的估计 $r = -0.329$, 问是否能肯定相关呢?

这个问题就是检验相关系数 ρ 是否为 0。给定 $\alpha = 0.05$, 对 $f = 18 - 2 = 16$, 从表 11 查得 $r_{0.05} = 0.4683$ 由于 $|r| < r_{0.05}$, 因此我们不能否定 $\rho = 0$ 的假设, 即不能肯定拉伸倍数与电流频率 H_s 相关。

例 2 从二维正态总体抽取大小为 $n = 103$ 的样本。按公式 (42) 算得 $r = 0.4699$, 要求对于显著性水平 $\alpha = 0.01$ 检验假设 $H_0: \rho = 0.7$ 。

对应于 $\rho = 0.7$, $r = 0.4699$, 从表 12 查得 $\zeta_0 = 0.87$, $Z = 0.51$, 从而

$$\left| Z - \zeta_0 - \frac{\rho_0}{2(n-1)} \right| = \left| 0.51 - 0.87 - \frac{0.7}{2 \times 102} \right| \approx 0.3635,$$

而从表 3 查得 $u_{0.01} = 2.576$, 故 $\frac{u_{0.01}}{\sqrt{n-3}} = 0.2576$, 比 0.3635 小, 因此拒绝 $\rho = 0.7$ 的假设.

表 14—15

假设一批产品的废品率为 p , 如果采用不放回抽样抽取 n 个产品, 其中有 i 个废品的概率为

$$p(n, i, p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i=0, 1, \dots, n,$$

而其中有 k 个以上废品的概率为

$$Q(n, k, p) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad k=0, 1, \dots, n, \quad (68)$$

表 14 对 $n=5, 10, \dots, 30; p=0.01, 0.02, \dots, 0.5$ 及不同的 k 给出了 $Q(n, k, p)$ 的值. 对于 $p > 0.5$ 的 $Q(n, k, p)$ 值可利用公式

$$Q(n, k, p) = 1 - Q(n, n-k+1, 1-p) \quad (69)$$

得到. 例如要查 $Q(20, 13, 0.8)$, 首先从表中查 $Q(20, 8, 0.2) = 0.03214$, 故 $Q(20, 13, 0.8) = 1 - Q(20, 8, 0.2) = 0.96786$. 它可用来检验假设 $p \leq p_0$, 否定域为: 废品个数 $X \geq k_0$, 此处 k_0 为满足 $Q(n, k, p_0) \leq \alpha$ 的最小 k . α 为显著性水平. 此检验的功效函数为 $Q(n, k_0, p)$ (即当废品率为 p 时, 用此检验判断为不合格的概率).

经常碰到的另一问题是: 如果抽了 n 个产品, 其中出现 k 个废品, 废品率 p 大致在什么范围内. 表 15 分别给出了置信度为 95%, 99% 的置信区间. 表中第一行表示样本中的废品数 k , 第一列表示合格产品个数 $n-k$. 对于置信度 $1-\alpha$, 置信区间的上界和下界分别是满足下列关系的 \bar{p}, \underline{p} :

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \bar{p}^i (1-\bar{p})^{n-i} = \frac{\alpha}{2}, \quad (70)$$

$$\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \underline{p}^i (1-\underline{p})^{n-i} = \frac{\alpha}{2}. \quad (71)$$

例 1 一批电子元件, 规定抽 30 件产品检查, 要求以显著性水平 5% 检验废品率 $p = 0.01$, 从表 14 查得使

$$\sum_{i=k}^{30} \binom{30}{i} 0.01^i (1-0.01)^{30-i} \leq 5\%$$

的最小 k 为 2. 故废品数 $X \geq 2$ 就拒绝这批产品.

它的功效函数 $Q(30, 2, p)$ 为:

p	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.2	0.3	0.4
$Q(30, 2, p)$	0.93615	0.12055	0.33332	0.54453	0.70421	0.81630	0.98948	0.99969	1

例 2 从某一批产品中抽取 20 个产品, 有 2 个次品. 对于置信度 95% 求次品率 p

的置信区间. 在表 15 ($1-\alpha=95\%$) 中找到 $k=2$, $n-k=20-2=18$ 处的区间为 (0.012, 0.317), 即为所求.

表 16—17

如果随机变数 X 服从泊松 (Poisson) 分布, 它的概率函数为

$$P(X=c) = P(\lambda, c) = \frac{\lambda^c}{c!} e^{-\lambda}. \quad (72)$$

表 16 给出了

$$P(X \geq c) = \sum_{i=c}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad (73)$$

这里 $0 < \lambda \leq 10$, $c=0, 1, 2, \dots$. 因为

$$P(X \geq c) = \sum_{i=c}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = 1 - \frac{1}{(c-1)!} \int_0^{\lambda} t^{c-1} e^{-t} dt = 1 - P(\chi^2_{2c} > 2\lambda), \quad (74)$$

故可利用表 4 查 $P(X \geq c)$ 的值. 这时 $f=2c$, $j=2\lambda$.

表 17 对于不同的置信度 $1-\alpha$, 给出了 λ 的置信区间. 如果试验结果 $x > 50$, 则可用下面的近似公式:

$$\text{置信上界 } \bar{\lambda} = \left(\frac{u_{\alpha} + 2\sqrt{x + \frac{1}{2} + \frac{u_{\alpha}^2}{4}}}{2} \right)^2, \quad (75)$$

$$\text{置信下界 } \underline{\lambda} = \left(\frac{u_{\alpha} - 2\sqrt{x - \frac{1}{2} + \frac{u_{\alpha}^2}{4}}}{2} \right)^2,$$

其中 u_{α} 可从表 3 查到.

这两个表的应用也是比较多的. 如在高质量产品中, 废品率 p 往往很小. 即使抽样次数 n 很大, 但 np 也不大, 理论上可以证明, 在上述情况下有

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}, \quad (76)$$

也就是说它近似于 $\lambda=np$ 的泊松分布.

例 一位纺织女工, 看 800 个锭子, 对每一个锭子纱的平均断头率为每分钟 0.002 次. 问这位女工一分钟接 5 次以上断头的概率为多少?

根据上面的论证, 我们可以近似地认为每分钟断头次数 X 服从泊松分布, $\lambda=800 \times 0.002=1.6$,

$$P(X \geq 5) = \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1.6^i}{i!} e^{-1.6} \approx 0.0237.$$

如果反过来问, 抽查过这位女工 30 次, 每次一分钟, 共接头 50 次, 问每一个锭子纱的平均断头率大致在什么范围内?

因为 30 次抽查总接头次数也是泊松分布, 其参数为 30λ , 对于 $x=50$ 及置信度 95%, 从表 17 查得 30λ 的置信区间为

$$(37.11, 65.92).$$

令断头率为 p , $\lambda=800p$, $30\lambda=24000p$, 故对置信度 95%, p 的置信区间为

$$\left(\frac{37.11}{24000}, \frac{65.92}{24000}\right) \approx (0.001546, 0.002747),$$

即有 95% 的把握说断头率在 0.001546 到 0.002747 之间。

表 18—20

统计量 D_n 定义如下:

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n^*(x) - F(x)|, \quad (79)$$

此处 $F(x)$ 是随机变数 X 的理论分布, $F_n^*(x)$ 为 X 的 n 次独立观测结果小于 x 的个数与 n 之比, 我们称它为经验分布。

经验分布与理论分布应相当接近, 即一般来说, D_n 不应太大, 因此, 检验理论分布为给定的 $F(x)$ 这一假设的否定域为

$$D_n > D_{n,\alpha}, \quad (80)$$

α 为给定的显著性水平, 临界值 $D_{n,\alpha}$ 由 $P(D_n > D_{n,\alpha}) = \alpha$ 确定。这一检验法称为柯尔莫哥洛夫 (Колмогоров) 检验。表 20 在 $F(x)$ 是连续分布条件下, 对不同 n 及 α 给出了 $D_{n,\alpha}$ 的数值。

对于连续分布 $F(x)$, 我们可以证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n < \lambda / \sqrt{n}) = Q(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2},$$

表 21 为 D_n 极限分布 $Q(\lambda)$ 的数值表。

如果两个总体分别抽取大小为 n_1, n_2 的样本, 对应的经验分布为 $F_{n_1}^*(x), F_{n_2}^*(x)$, 我们规定

$$D_{n_1, n_2} = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_{n_1}^*(x) - F_{n_2}^*(x)|. \quad (81)$$

如果两个总体的分布是相同的, D_{n_1, n_2} 应当比较小, 故检验两个总体分布相同假设的否定域为

$$D_{n_1, n_2} \geq d(n_1, n_2, \alpha), \quad (82)$$

我们也可写为

$$k D_{n_1, n_2} \geq m(n_1, n_2, \alpha), \quad (83)$$

此处 k 是 n_1, n_2 的最小公倍数, 它使 $k D_{n_1, n_2}$ 只取非负整数, α 为显著性水平, $m(n_1, n_2, \alpha)$ 为满足

$$P(k D_{n_1, n_2} \geq r) \leq \alpha \quad (84)$$

的 r 中的最小整数。这一检验称为斯米尔诺夫 (Смирнов) 检验。表 22 对于不同的 n_1, n_2 及 $\alpha = 0.10, 0.05, 0.01$ 给出了 $m(n_1, n_2, \alpha)$ 的数值。

对于连续分布 $F(x)$, 我们也可以证明

$$\lim_{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \rightarrow \infty} P\left(D_{n_1, n_2} < \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}\right) = Q(\lambda).$$

例 1 某钢铁厂从以往生产统计数据得知铁水含碳量服从正态分布 $N(4.55, (0.10)^2)$, 大修后重新生产, 测得 10 炉铁水含碳量为

4.53, 4.66, 4.55, 4.50, 4.48, 4.62, 4.42, 4.57, 4.54, 4.58, 问大修后铁水含碳量的分

布是否有变化?

因为

$$D_n = \max_{1 \leq i \leq 10} \{ |F_n^*(x_i) - F(x_i)|, |F_n^*(x_i+0) - F(x_i)| \} \text{ [注] , 此处 } x_1, \dots, x_{10} \text{ 表示 10}$$

个观察数据。我们只需作如下计算即得 D_n 的值

x	4.42	4.48	4.50	4.53	4.54	4.55	4.57	4.58	4.62	4.63
$F_n^*(x)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$F_n^*(x+0)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$F(x)$	0.0963	0.2420	0.3085	0.4207	0.4601	0.5	0.5793	0.6179	0.7580	0.8643

此处 $F(x) = \Phi\left(\frac{x-4.55}{0.1}\right)$ (查表 1)。从上表找出 $D_n = |F(4.58) - F_n^*(4.58+0)| = 0.1821$ 。

而对显著性水平 $\alpha=0.10$, 从表 20 查得 $D_{10,0.10}=0.3687$, 因为 $D_n < D_{10,0.1}$, 我们就没有理由说大修后铁水含碳量的分布有改变。

例 2 对于表 1—3 的说明中的例 1 (关于某种化学纤维强力的例子), 现在我们要问, 那一批强力数据是否符合正态分布 $N(6, (1.19)^2)$?

x_i	观测值小于 x_i 的个数	$F_n^*(x_i)$	$F(x_i)$	$ F_n^*(x_i) - F(x_i) $
3.45	18	0.0171	0.0162	0.0009
3.85	40	0.0381	0.0352	0.0029
4.25	76	0.0724	0.0708	0.0016
4.65	133	0.1314	0.1290	0.0024
5.05	225	0.2143	0.2120	0.0023
5.45	343	0.3260	0.3230	0.0030
5.85	474	0.4510	0.4480	0.0030
6.25	614	0.5840	0.5830	0.0010
6.65	746	0.7100	0.7090	0.0010
7.05	851	0.8100	0.8110	0.0010
7.45	934	0.8891	0.8890	0.0001
7.85	989	0.9415	0.9410	0.0005
8.25	1019	0.9701	0.9710	0.0009
8.65	1037	0.9872	0.9870	0.0002
9.05	1045	0.9943	0.9949	0.0001
9.45	1048	0.9977	0.9932	0.0005
9.85	1049	0.9987	0.9994	0.0007
10.25	1050	0.9997	1.0000	0.0003

为了计算方便, 我们仍按表 1—3 说明中例 1 一样分组, 以端点为 x_i 近似地算出 D_n 。

[注] $F_n^*(x+0)$ 表示小于或等于 x 的试验结果的个数与 n 之比。

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n^*(x) - F(x)| \approx \max_i |F_n^*(x_i) - F(x_i)| = 0.003,$$

$$\sqrt{n} D_n = \sqrt{1050} \times 0.003 \approx 0.0972,$$

从表 21 查得对应于 $1-Q(\lambda) = 10\%$ 的 $\lambda = 1.22$, 故

$$\sqrt{n} D_n < \lambda,$$

于是没有理由认为这种化学纤维的强力不服从正态分布 $N(6, (1.19)^2)$ 。

这里必须指出一点, 我们没有精确地计算 D_n , 因为计算复杂, 而是采用近似值, 这个值稍偏小。如果检验结果是拒绝假设, 则结论一定正确, 如果是接受假设, 当 $\sqrt{n} D_n$ 离临界值 λ 较远时, 也没有问题, 若离临界值 λ 很近, 则要慎重考虑。

例 3 我们要比较两条生产垫圈的生产线的差异, 今从第一条生产线取 8 个垫圈, 从第二条生产线取 7 个垫圈, 测出它们的外直径数据, 按大小列于下表。

令 d_{1i}, d_{2i} 分别代表第一, 二条生产线垫圈外直径数据, x_i 为 d_{1i}, d_{2i} 混合后按大小次序排列的值。

d_{1i}	1.57	1.58	1.62	1.64	1.68	1.72	1.73	1.76							
d_{2i}	1.55		1.59	1.63	1.65	1.69	1.70		1.75						
$kF_{n_1}(x_i+0)$	0	7	14	14	21	21	28	28	35	35	35	42	49	49	56
$kF_{n_1}(x_i)$	0	0	7	14	14	21	21	28	28	35	35	35	42	49	49
$kF_{n_2}(x_i+0)$	8	8	8	16	16	24	24	32	32	40	48	48	48	56	56
$kF_{n_2}(x_i)$	0	8	8	8	16	16	24	24	32	32	40	48	48	48	56
最大绝对差 l_i	8	8	6	6	5	5	4	4	4	5	13	13	6	7	7

因为

$$kD_{n_1 n_2} = k \max_i \max \{ |F_{n_1}(x_i+0) - F_{n_2}(x_i)|, |F_{n_1}(x_i+0) - F_{n_2}(x_i+0)|, |F_{n_1}(x_i) - F_{n_2}(x_i)|, |F_{n_1}(x_i) - F_{n_2}(x_i+0)| \} = \max_i l_i = 13$$

比从表 22 查得 $\alpha = 10\%$ 的临界值 $m(8, 7, 0.1) = 34$ 要小。故我们没有理由认为两条生产线质量有明显差异。

表 21—22

在对产品进行抽样检查的时候, 经常采用所谓“一次抽样方案”, 表 21, 22 就是在这种抽样方案的制订或分析中需要用到的。从一批产品中随机抽取 n 件产品, 若其中“缺陷”数遵从泊松概率分布, 如疵点数的分布; 或“缺陷”数为二项分布, 如大批量的废品数的分布, 都可用此两表。

一次抽样方案为, 从一批产品中随机抽取 n 件, 若其中的“缺陷”数 d 不超过“接收界限数” c , 则认为该批产品合格; 若“缺陷”数 d 超过“接收界限数” c , 则认为该批产品不合格。这一方案记为 (n, c) 。

假设一批产品的“缺陷”率为 p , 在一次抽样方案 (n, c) 的检验下, 判断该批产品合格的概率, 称为接收概率, 记作 $P(A)$, 即

$$P(A) = \sum_{d=0}^c \frac{e^{-np}(np)^d}{d!}, \quad (77)$$

这里 d 是疵点数, p 是疵点率; 或

$$P(A) = \sum_{d=0}^c \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d}, \quad (78)$$

这里 d 是废品数, p 是废品率(此两表的结果是二项分布情况的近似结果)。

表 21 对于 $P(A)$ 的不同数值及 $c=0, 1, 2, \dots, 49$ 给出了 np 的值。可利用它计算相应于 $P(A)$ 值的“缺陷”率 p , 或者相反, 计算相应于给定 p 的接收概率 $P(A)$ (见例 1)。

表 22 中的 p_1 和 p_2 与 α 和 β 有如下关系: 在一次抽样方案 (n, c) 检验下, 对“缺陷”率 p_1 的一批产品判断为合格批的概率为

$$P_{p_1}(A) = 1 - \alpha,$$

对“缺陷”率 p_2 的一批产品判断为合格批的概率为

$$P_{p_2}(A) = \beta.$$

表 22 对于 α, β 的六种组合给出了 p_2/p_1 的数值, 因此, 对于预先给定的 α, β 和 p_1, p_2 , 利用表 22 可计算出相应的一次抽样方案 (n, c) (见例 2)。

例 1 计算一次抽样方案 $n=75$ 和 $c=4$ 的接收概率曲线。

用 75 除以在表 21 中 $c=4$ 行的值, 得到 OC 曲线的 13 个点:

接收概率 $P(A)$	“缺陷”率 p	接收概率 $P(A)$	“缺陷”率 p
0.995	$\frac{1.078}{75} = 0.01437$	0.250	$\frac{6.274}{75} = 0.08365$
0.990	$\frac{1.279}{75} = 0.01705$	0.100	$\frac{7.994}{75} = 0.1066$
0.975	$\frac{1.623}{75} = 0.02164$	0.050	$\frac{9.154}{75} = 0.1221$
0.950	$\frac{1.970}{75} = 0.02627$	0.025	$\frac{10.242}{75} = 0.1372$
0.900	$\frac{2.433}{75} = 0.03244$	0.010	$\frac{11.605}{75} = 0.1547$
0.750	$\frac{3.369}{75} = 0.04492$	0.005	$\frac{12.594}{75} = 0.1679$
0.500	$\frac{4.671}{75} = 0.06228$		

例 2 若 $p_1=0.02, p_2=0.04, \alpha=0.05$ 和 $\beta=0.05$, 计算一次抽样方案 $n=?$ 和 $c=?$ 计算:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{0.04}{0.02} = 2.$$

在表 22 的 $\alpha=0.05$ 和 $\beta=0.05$ 列中, 查找大于或等于 $\frac{p_2}{p_1}=2$ 的最小值得 2.030, 因此

$$c=22,$$

$$np_1 = 15.719, \quad n = \frac{15.719}{0.02} = 786.$$

表 23

在试验中,经常需要检验两种不同的处理 A, B 对产品某一指标的效应是否相等. 如果资料是成对地出现,即样本是 $(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, N$, 这里 x_i 和 y_i 分别表示在处理 A 和 B 之下对该指标的观测值,则符号检验是一个简单易行的检验办法.

符号检验所检验的统计假设是 $F_1 = F_2$, 这里 F_1, F_2 分别表示在处理 A, B 之下,该指标的分布.

符号检验的程序如下:

- (1) 对 $i=1, \dots, N$, 若 $x_i > y_i$, 记以“+”;若 $x_i < y_i$, 记以“-”;若 $x_i = y_i$, 记为“0”.
- (2) 用 n_+ 和 n_- 分别表示“+”和“-”的个数,且记 $n = n_+ + n_-$, $S = \min(n_+, n_-)$.
- (3) 对于 n 和显著性水平 α 在表 23 中查得临界值 S_α .
- (4) 将 S 和 S_α 比较,如果 $S \leq S_\alpha$, 则否定假设,即认为两种处理对指标的效应不同;否则不否定假设.

我们看到,符号检验不要求知道被检验指标的分布规律,甚至该指标可以是定量的,也可以是定性的,只要每一对的两个观测结果能够比较即可,所以其适用范围较为广泛.

严格地说,符号检验及下面的秩和检验所检验的假设是

$$P(X < Y) = P(X > Y),$$

其中 X, Y 分别表示遵从 F_1 和 F_2 分布的随机变数. 事实上,符号检验相当于检验二项分布参数 $p = \frac{1}{2}$, 故 S_α 为满足 $\sum_{i=0}^k \binom{n-1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq \alpha$ 的最大整数 k . 表 23 对 $n \leq 100$ 和 $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%, 25\%$ 给出了临界值 S_α 的数值. 对于 $n > 100$, 可用下列近似公式进行计算:

$$S_\alpha = \frac{n-1}{2} - k_\alpha \sqrt{n+1},$$

其中 k_α 对于 $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%, 25\%$ 分别为 1.2879, 0.9800, 0.8224 和 0.5752.

例 1 某车间甲、乙两台机床同时生产某种产品,每隔一小时各抽取一个产品进行观测,经过 50 小时,测得 50 对数据列表于下:

甲 台	6.7	7.2	5.6	8.0	6.2	7.1	4.8	6.2	7.5	3.2	6.2	6.7	9.6	7.3	6.2	5.7	4.4
乙 台	5.2	6.8	7.3	8.0	5.6	8.2	6.3	4.3	7.3	7.8	6.5	7.4	6.2	8.0	5.5	8.2	5.6
符 号	+	+	-	0	+	-	-	+	+	+	-	-	+	-	+	-	-
甲 台	6.7	7.3	7.6	5.8	6.6	7.2	8.0	5.8	4.7	4.5	6.6	6.2	6.4	6.7	7.7	7.0	8.1
乙 台	6.7	7.0	8.1	6.5	7.3	6.8	7.8	6.5	5.6	4.4	5.7	6.5	6.4	7.2	5.8	6.4	7.3
符 号	0	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	-	0	-	+	+	+
甲 台	6.6	5.5	5.7	6.0	5.5	4.7	5.6	7.0	7.1	6.7	5.7	8.1	6.6	5.9	4.8	6.6	
乙 台	5.4	7.0	7.2	6.1	6.4	6.0	5.4	6.6	7.1	7.0	6.4	6.7	7.2	6.7	5.5	5.6	
符 号	+	-	-	-	-	-	+	+	0	-	-	+	-	-	-	+	

问产品指标是否受机床的影响($\alpha=0.05$)?

容易算出 $n=46, S=21$, 而由表 23 查得 $S_\alpha=15$, 从而 $S>S_\alpha$, 所以我们不能认为产品指标受机床的影响。

表 23 还可用来检验两个变量是否相关。

例 2 某炼钢厂欲考察钢的精炼时间 Y 与熔毕碳 X 是否有关。将过去生产的 48 炉钢的资料点在图上(图 2), 作平行于纵轴的直线 A , 使左右的点(近于)相等; 再作平行于横轴的直线 B , 使上下的点(近于)相等, 并尽量使直线 A, B 上没有点。 A, B 把平面分成四块, 每块点数分别为

$$n_1=16, n_2=8, n_3=16, n_4=8.$$

令

$$n_+ = n_1 + n_3 = 32, n_- = n_2 + n_4 = 16,$$

则

$$n = n_+ + n_- = 48, S = \min(n_+, n_-) = 16.$$

对于 $\alpha=10\%$, 从表 23 查得 $S_\alpha=17>S$, 于是我们认为精炼时间与熔毕碳相关。而且可用

$$\sin\left(\frac{n_+}{n} - \frac{1}{2}\right)\pi = -\cos\frac{n_+\pi}{n} = -\cos\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}$$

来近似地估计其相关系数。

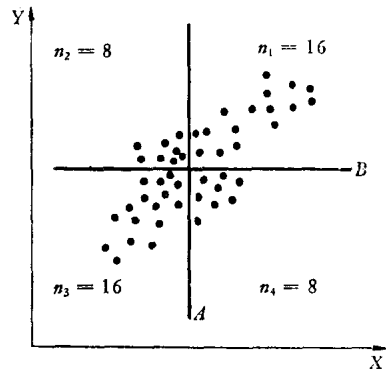


图 2

表 24

本表可用来检验两总体分布是否相等。我们分别从两个总体 A, B 抽取大小为 n_1, n_2 的样本, 不妨假定 $n_1 < n_2$ 。检验程序如下:

- (1) 将两样本混合起来按大小编序。每个数据对应的序数称为它的秩。
- (2) 计算取自 A 的样本所对应秩之和。用 T 表示它。
- (3) 对于 n_1, n_2 与显著性水平 α , 在表中查出秩和下限 T_1 与秩和上限 T_2 。
- (4) 若 $T \leq T_1$ 或 $T \geq T_2$, 则否定两总体分布相等的假设, 认为它们有显著差异; 否则不认为有显著差异。

这一检验法称为秩和检验。

表 24 对于 $n_1 \leq n_2 \leq 10$ 和 $\alpha=0.025, 0.05$ 给出了 T_1 和 T_2 的数值。当 n_1, n_2 较大时, 在假设 $F_1=F_2$ 之下, 秩和 T 近似于正态分布 $N\left(\frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}, \frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}\right)$, 因此可用正态分布的检验。

我们看到, 符号检验要求资料成对地出现, 而且它只是简单地比较每一对中两个量之间的大小, 不管其具体数值, 因此必然损失许多可利用的信息。秩和检验则在一定程度上弥补了上述缺点。

例 甲、乙二人作某气体中二氧化碳(CO_2)含量的分析, 测得数据如下:

甲	14.7	14.8	15.2	15.6
乙	14.6	15.0	15.1	

问两人的分析结果是否有显著的差异?

将数据混合编序,列成下表:

秩	1	2	3	4	5	6	7
甲		14.7	14.8			15.2	15.6
乙	14.6			15.0	15.1		

于是 $n_1=3, n_2=4, T=1+4+5=10$, 对于 $\alpha=0.05$, 由表 24 查得 $T_1=7, T_2=17$, 则 $T_1 < T < T_2$, 所以不能否定假设, 即我们不能认为两人的分析结果有显著的差异.

表 25—26

在两种元素的任意序列中, 每一种元素都被另一种元素分隔为一些子列. 这每一个子列称为一个游程, 每一个游程所含有的元素个数称为该游程的长度. 例如序列 +++ --- + - - - - + +, 头一个子列 +++ 就是一个长度为 3 的 + 游程, 第二个子列 --- 是长度为 2 的 - 游程, 等等. 游程总数记为 R , 例如上面的序列, $R=5$.

用 n_1, n_2 分别表示两种元素的个数. 我们假定这 n_1+n_2 个元素的任一排列出现的概率是相等的. 于是, 对 $k=1, 2, \dots$,

$$P(R=2k) = 2 \frac{\binom{n_1-1}{k-1} \binom{n_2-1}{k-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}} \quad (86)$$

以及

$$P(R=2k+1) = \frac{\binom{n_1-1}{k} \binom{n_2-1}{k-1} + \binom{n_1-1}{k-1} \binom{n_2-1}{k}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}. \quad (87)$$

用 $R_{1\alpha}$ 表示满足 $P(R \leq R_1) \leq \alpha$ 的 R_1 中的最大整数, $R_{2\alpha}$ 表示满足 $P(R \geq R_2) \leq \alpha$ 的 R_2 中的最小整数. 表 25 对 $\alpha=0.025, 0.05$ 和 $n_1 \leq n_2=2, 3, \dots, 20$ 以及 $n_1=n_2=10, \dots, 100$ 给出了 $R_{1\alpha}$ 和 $R_{2\alpha}$ 的数值. 对 $n_1 > n_2$ 的情况, 由于对称性, 可交换 n_1 和 n_2 的位置来查.

表 25 可用来检验样本的随机性, 即检验统计假设: “对某一总体所作的观测是随机的”. 其检验程序如下:

- (1) 将观测数据按得到它们的先后次序排列.
- (2) 确定样本中位数.

(3) 对中位数以上的数据记以“+”, 中位数以下的记以“-”, 对应于观测数据原来的次序得到一个“+”、“-”号的序列.

- (4) 用 n_1, n_2 分别表示“+”、“-”号的个数, R 表示游程总数.
 (5) 对给定的显著性水平 α 和 n_1, n_2 , 在表 25 中查得 $R_{1, \frac{\alpha}{2}}$ 和 $R_{2, \frac{\alpha}{2}}$.
 (6) 当 $R \leq R_{1, \frac{\alpha}{2}}$ 或 $R \geq R_{2, \frac{\alpha}{2}}$ 时, 否定假设.

例 1 我们对某一总体进行观测, 所得数据按先后排列如下:

1, 58, 37, 18, 14, 21, 48, 43, 22, 53, 36, 38,
 9, 15, 63, 56, 64, 26, 30, 33, 50, 3, 60, 41.

样本中位数为 36.5, 相应的“+”、“-”号序列为

- + + - - - + + - + - + - - + + + - - - + - + +,

容易数出 $n_1 = n_2 = 12, R = 14$. 对 $\alpha = 0.10$, 在表 24 中查出 $R_{1, 0.05} = 8, R_{2, 0.05} = 18$. 由于 $R_{1, 0.05} < R < R_{2, 0.05}$, 我们不能否定观测值随机性的假设.

表 25 还可用来检验统计假设 $F_1 = F_2$, 这里 F_1, F_2 假定为连续分布. 其检验程序如下:

- (1) 将分别从两总体抽取的大小为 n_1, n_2 的样本混合后按大小排列.
- (2) 对于第一个样本的数据记以“+”, 第二个样本的数据记以“-”, 按原来次序得到一个“+”、“-”号的序列.
- (3) 用 R 表示游程总数.
- (4) 对给定的显著性水平 α 在表 25 中查得 $R_{1\alpha}$.
- (5) 当 $R \leq R_{1\alpha}$ 时, 否定假设.

例 2 从两个总体抽取的样本分别为

9, 22, 64, 34, 17, 4, 31, 28

和

58, 53, 26, 11, 52, 51, 8,

混合后按大小排列, 并分别换以“+”、“-”号, 得序列

+ - + - + + - + + + - - - - +,

这里 $n_1 = 8, n_2 = 7, R = 9$. 从表 24 查得 $R_{1, 0.05} = 4$, 从而 $R > R_{1\alpha}$, 所以对于 $\alpha = 0.05$, 不能否定假设.

上述两种假设还可利用最长游程的长度 L 和表 26 来检验. 这里, 我们要求在“+”、“-”号序列中“+”和“-”的个数相等, 即 $n_1 = n_2 = n$. 表 26 对 $5 \leq n \leq 20$ 和 $4 \leq L_p \leq 10$ 给出了出现长度不小于 L_p 的游程的概率 p , 这一概率是根据下列公式计算的:

$$p = 1 - \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{r_1 > \frac{n}{L}} A(r_1) \sum_{r_2 = r_1 - 1}^{r_1 + 1} F(r_1, r_2) A(r_2), \quad (88)$$

其中

$$A(r) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-r}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{r}{i} \binom{n-1-i(L-1)}{r-1}, \quad (89)$$

$$F(r_1, r_2) = \begin{cases} 0, & |r_1 - r_2| > 1, \\ 1, & |r_1 - r_2| = 1, \\ 2, & |r_1 - r_2| = 0. \end{cases} \quad (90)$$

例 3 例 1 的数据如果是另外一种次序:

1, 3, 18, 37, 14, 21, 48, 9, 22, 15, 36, 38,
26, 53, 30, 33, 58, 43, 56, 41, 50, 60, 64, 63.

相应的“+”、“-”号序列为

----+---+-----+-+---+++++

我们可以直观地看出从小到大的变化趋势。但根据游程总数检验, $R=10$, $R_{1,0.05} < R < R_{2,0.05}$, 所以对 $\alpha=0.10$, 不能否定随机性假设。这时, 我们利用最长游程长度 L 来作检验, $L=8$ 。从表 26 对 $n=12$, $L_p=8$, 查得 $p=0.015$ 。我们看到, 即使对显著性水平 $\alpha=0.05$, 也应否定假设, 即认为数据的取得不是随机的。

利用最长游程长度 L 来检验假设 $F_1=F_2$, 方法完全类似。

表 27

设从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 随机地抽出一个大小为 n 的样本, 其中最大值记作 $x_{(n)}$, 最小值记作 $x_{(1)}$, 并定义样本极差为

$$W = x_{(n)} - x_{(1)}, \quad (91)$$

$\frac{W}{\sigma}$ 的分布函数及均值分别为

$$P\left(\frac{W}{\sigma} < \omega\right) = n \int_{-\infty}^{\omega} [\Phi(x+\omega) - \Phi(x)]^{n-1} d\Phi(x), \quad (92)$$

$$d_n = E\left(\frac{W}{\sigma}\right) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^n(x) dx,$$

此处 $\Phi(x)$ 为标准正态分布。

表 27 对于 $n=2$ 至 20 给出了 d_n 值及分布分位数。

由于 W 的数学期望与 σ 成正比, 可用 $\frac{W}{d_n}$ 作为标准差的一个无偏估计, 这个估计, 当 n 小时与采用标准方法求出的估计相比, 效率相当高, 而当 $n > 10$ 时, 效率则迅速下降。

| n | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | ω |
|------|-----|----|----|----|----|----|----|----------|
| 效率 % | 100 | 93 | 95 | 93 | 91 | 89 | 85 | 0 |

由于 $n > 10$ 时, 估计误差太大, 可随机地把样本分为每组有少数几个(最好 5 个左右)数据, 由各小组分别估计 σ , 然后再取平均。

例 1 下列数据是从维尼纶厂 20 天正常生产中随机地抽出的纤度数据:

I 1.36 1.49 1.43 1.41 1.37 $W_I=0.13$
 II 1.40 1.32 1.42 1.47 1.39 $W_{II}=0.15$
 III 1.41 1.36 1.40 1.34 1.42 $W_{III}=0.08$
 IV 1.42 1.45 1.35 1.42 1.39 $W_{IV}=0.10$

$$\bar{W} = \frac{1}{4}(W_I + W_{II} + W_{III} + W_{IV}) = 0.115,$$

从表 27 查得, 对 $n=5$ 时 $\frac{1}{d_5}=0.430$, 于是

$$\hat{\sigma} = \bar{W} \times \frac{1}{d_5} = 0.049,$$

而用标准方法求出的 s 值为 0.043.

表 27 极差分布的分位数, 对工业质量控制中检查生产的变异性是有用的.

例 2 当某种保险丝使用时间的临界标准差 σ_0 定为 0.5 秒时, 抽取 5 根保险丝, 其使用时间的极差的 2.5% 和 0.1% 控制上限分别为

$$2.5\% \text{ 的控制上限} = \sigma_0 \times \text{极差分布 } 2.5\% \text{ 上侧分位数} = 0.5 \times 4.20 = 2.10 \text{ (秒)},$$

$$0.1\% \text{ 的控制上限} = 0.5 \times 5.48 = 2.74 \text{ (秒)},$$

此处 4.20 及 5.48 是从表 27 上侧分位数 $n=5$ 那一行查得的. 控制上限是表示极差必须小于这控制上限才认为生产正常, 否则就得查找原因, 加以改进.

表 28

当对 n 个等间隔的值 (自变量) x_1, x_2, \dots, x_n 进行试验时, 用正交多项式对试验结果作统计分析, 特别是配回归多项式较为方便.

不失普遍性, 设 $x_1=1, x_2=2, \dots, x_n=n$. 又定义

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= 1, \\ \psi_1(x) &= x - \bar{x}, \\ \psi_2(x) &= (x - \bar{x})^2 - \frac{n^2 - 1}{12}, \\ \psi_3(x) &= (x - \bar{x})^3 - \frac{3n^2 - 7}{20}(x - \bar{x}), \\ \psi_4(x) &= (x - \bar{x})^4 - \frac{3n^2 - 13}{14}(x - \bar{x})^2 + \frac{3(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{560}, \\ \psi_5(x) &= (x - \bar{x})^5 - \frac{5(n^2 - 7)}{18}(x - \bar{x})^3 + \frac{15n^4 - 230n^2 + 407}{1008}(x - \bar{x}), \\ &\dots\dots\dots \\ \psi_{k+1}(x) &= \psi_1(x)\psi_k(x) - \frac{k^2(n^2 - k^2)}{4(4k^2 - 1)}\psi_{k-1}(x); \end{aligned} \quad (93)$$

此处 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, 则 $\psi_k(x)$ 是 x 的 k 次多项式, 并满足正交性条件:

$$\sum_{x=1}^n \psi_i(x) = 0, \quad i \neq 0, \quad (94)$$

$$\sum_{x=1}^n \psi_i(x)\psi_k(x) = 0, \quad i \neq k. \quad (95)$$

由于 $\psi_i(x)$ 对 x 的整数值不一定都为整数, 所以要乘上适当的数 λ_i , 使

$$X_i(x) = \lambda_i \psi_i(x) \quad (96)$$

在 n 个正整数点上成为绝对值尽可能小的整数. 这时

$$\sum_{x=1}^n X_i(x)X_k(x) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ S_i, & i = k. \end{cases} \quad (97)$$

表 28 列出了 $X_i(x)$, 即 $\lambda_i \psi_i(x)$ 在 n 个正整数点上的值, 并在最下一行列出了它的平方和 S_i 的值.

x 的 p 次多项式一般可以写成

$$\beta_0 + \beta_1 X_1(x) + \beta_2 X_2(x) + \cdots + \beta_p X_p(x). \quad (98)$$

设对等间隔的 x 值, 测出相应的试验值 y , 并满足构造:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1(x) + \beta_2 X_2(x) + \cdots + \beta_p X_p(x) + \varepsilon, \quad (99)$$

假定式中 ε 是服从正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的随机误差. 设

$$B_i = y_1 X_i(1) + y_2 X_i(2) + \cdots + y_n X_i(n), \quad (100)$$

则得到最小二乘法估计的第 i 项回归系数, 即 β_i 的估计值

$$b_i = B_i / S_i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, p. \quad (101)$$

b_i 的数学期望等于 β_i , 它的方差由下式给出:

$$V(b_i) = \sigma^2 / S_i. \quad (102)$$

当 $i \neq k$ 时, b_i 和 b_k 的协方差为 0. 误差平方和为

$$S_e = \sum_{x=1}^n y_x^2 - \sum_{i=0}^p B_i^2 / S_i = \sum_{x=1}^n (y_x - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^p B_i^2 / S_i, \quad (103)$$

其中 $\bar{y} = \sum_{x=1}^n y_x / n$, 误差方差为

$$V_e = S_e / f_e, \quad f_e = n - p - 1. \quad (104)$$

上式中的 $B_i^2 / S_i (i = 0, 1, \cdots, p)$ 分别叫做 0 次效应, 1 次效应, \cdots , p 次效应的平方和.

例 对温度 $x^\circ\text{C}$ 测得乙醚的气化潜热 y 如下. 试求 x, y 之间的经验公式.

表 I 数据 和 差分

| x | y | Δy | $\Delta^2 y$ |
|-----|-------|------------|--------------|
| 0 | 94.00 | | |
| 10 | 93.12 | -0.88 | -0.16 |
| 20 | 92.08 | -1.04 | -0.13 |
| 30 | 90.86 | -1.22 | -0.16 |
| 40 | 89.48 | -1.33 | -0.13 |
| 50 | 87.92 | -1.56 | -0.16 |
| 60 | 86.20 | -1.72 | -0.18 |
| 70 | 84.30 | -1.90 | -0.17 |
| 80 | 82.23 | -2.07 | -0.16 |
| 90 | 80.00 | -2.23 | -0.19 |
| 100 | 77.58 | -2.42 | -0.15 |
| 110 | 75.01 | -2.57 | -0.13 |
| 120 | 72.23 | -2.75 | |

由于二次差分几乎一样, 可以认为 y 是 x 的二次多项式. 用正交多项式拟合, 知道三次项可以忽略不计 (表 II, III).

表II 正交多项式的计算

| X | ψ_0 | ψ_1 | ψ_2 | $\frac{1}{6}\psi_3$ | y | y^2 |
|--------------------|----------|----------|-----------|---------------------|---------|-----------|
| 1 | 1 | -6 | 22 | -11 | 94.00 | 8836.00 |
| 2 | 1 | -5 | 11 | 0 | 93.12 | 8671.38 |
| 3 | 1 | -4 | 2 | 6 | 92.08 | 8478.73 |
| 4 | 1 | -3 | -5 | 8 | 90.86 | 8255.54 |
| 5 | 1 | -2 | -10 | 7 | 89.48 | 8006.67 |
| 6 | 1 | -1 | -13 | 4 | 87.92 | 7729.93 |
| 7 | 1 | 0 | -14 | 0 | 86.20 | 7430.44 |
| 8 | 1 | 1 | -13 | -4 | 84.30 | 7106.49 |
| 9 | 1 | 2 | -10 | -7 | 82.23 | 6761.77 |
| 10 | 1 | 3 | -5 | -8 | 80.00 | 6400.00 |
| 11 | 1 | 4 | 2 | -6 | 77.58 | 6018.68 |
| 12 | 1 | 5 | 11 | 0 | 75.01 | 5626.50 |
| 13 | 1 | 6 | 22 | 11 | 72.26 | 5221.51 |
| E_i | 1105.04 | -329.69 | -170.59 | -0.03 | 1105.04 | 94543.570 |
| S_i | 13 | 182 | 2002 | 572 | | |
| $B_i/S_i=b_i$ | 85.003 | -1.81148 | -0.085210 | -0.00005 | | |
| $B_i^2/S_i=b_iB_i$ | 93931.80 | 597.228 | 14.536 | 0.0000 | | |

表中 $X=x/10+1$.

表III 方差分析

| 来源 | 平方和 | 自由度 | 平均平方 |
|------|-----------|-----|----------------|
| 零次回归 | 93931.800 | 1 | 93931.800** |
| 一次回归 | 597.228 | 1 | 597.228** |
| 二次回归 | 14.536 | 1 | 14.536** |
| 误差 | 0.006 | 10 | 0.0006 = F_e |
| 总 | 94543.570 | 13 | |

于是利用一次多项式 $\psi_1(X)$ 和二次多项式 $\psi_2(X)$, 则有

$$\begin{aligned}
 y &= 85.003 - 1.81148\psi_1(X) - 0.085210\psi_2(X) \\
 &= 85.003 - 1.81148(X-7) - 0.085210\{(X-7)^2 - 14\} \\
 &= 93.997 - 0.078896X - 0.00085210X^2.
 \end{aligned}$$

把观测数据记作 y_{obs} , 由上式针对 X 算出的 y 值记作 y_{cal} , 两者的比较如下.

| | | | | | | | |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| y_{obs} | 94.00 | 93.12 | 92.08 | 90.86 | 89.48 | 87.92 | 86.20 |
| y_{cal} | 94.001 | 93.129 | 92.083 | 90.867 | 89.482 | 87.926 | 86.190 |
| y_{obs} | 84.30 | 82.23 | 80.00 | 77.58 | 75.01 | 72.26 | |
| y_{cal} | 84.304 | 82.236 | 79.999 | 77.591 | 75.013 | 72.263 | |

表 29

$n \times n$ 或 n 阶拉丁方是这样一种方阵：把 n 个不同记号排成 n 行 n 列，使得各个记号在各行各列出现一次(而且只出现一次)。这种方阵之所以叫做拉丁方，是因为在历史上最初使用的记号是拉丁字母。拉丁方的第一行和第一列按某种自然的或标准的次序，如按拉丁字母表的次序，排成的，叫做标准拉丁方。

在用拉丁方设计试验时，重要的是标准拉丁方的可能模型及其所属的个数。到现在为止，人们只知道 $n \leq 8$ 的情形。 $n \times n$ 标准拉丁方的数目 N_n 如下。

| n | N_n |
|-----|-----------------|
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |
| 4 | 4 |
| 5 | 56 |
| 6 | 9,408 |
| 7 | 16,942,080 |
| 8 | 535,281,401,856 |

从一个标准拉丁方通过行、列或字母的置换，可以生成更多的拉丁方。这个数目，包含给定的标准拉丁方本身在内，是 $n!(n-1)!$ 。因此， $n \times n$ 拉丁方的总数 T_n 是

$$T_n = n!(n-1)!N_n. \quad (105)$$

当把两个同阶拉丁方叠合起来时，如果一个拉丁方的每个字母同另一个拉丁方的每个字母一起出现一次(而且只出现一次)，那末我们称这两个拉丁方互为正交。例如，把两个拉丁方

| | | | | | |
|---|---|---|----------|----------|----------|
| A | B | C | α | β | γ |
| B | C | A | γ | α | β |
| C | A | B | β | γ | α |

叠合成的

| 行 | 列 | 拉 | 希 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 3 |
| 3 | 3 | 2 | 1 |

| | | |
|------------|------------|------------|
| A α | B β | C γ |
| B γ | C α | A β |
| C β | A γ | B α |

满足上述正交性条件。这样一对互为正交的拉丁方叠合成的方，叫做希腊-拉丁方。

现在已经知道，对除 2 和 6 以外的自然数 n ，总可以造出一对 $n \times n$ 正交拉丁方。不难看出，在 T_n 个拉丁方中互为正交的拉丁方顶多有 $n-1$ 个，如果存在 $n-1$ 个互为正交的 $n \times n$ 拉丁方，叫做正交拉丁方的完全系。已经证明，当 n 为素数或素数幂时，存在着正交拉丁方的完全系。表 29 对 $n=3, 4, 5, 7, 8$ 和 9 列出了正交拉丁方的完全系，并对 $n=10, 12$ 分别列出了二个和五个互为正交的拉丁方。已经证明，不存在 6×6 的正交拉丁方。在用正交拉丁方进行试验设计时，数据的分析可直接采用下节的正交阵列表更为方便，因为正交阵列

表可以视为正交拉丁方的自然推广。例如通过行、列和记号的对应关系,可把 3×3 希腊-拉丁方排成上页左下表的形状。而这个表无非就是下节的正交阵列 $L_9(3^4)$ 。事实上,下节的 $L_9(3^4)$, $L_{16}(4^5)$ 和 $L_{25}(5^3)$ 就是直接从 3, 4 和 5 阶正交拉丁方的完全系按上述方法分别排成的。

表 30

这里介绍的是一类常用的正交阵列表(简称正交表),记作 $L_N(m^k)$ 。它是一个 N 行 k 列的矩阵;每列由 $1, 2, \dots, m$ 等 m 个数字构成,而且每个数字在每列上出现的次数相同;在任意两列中,同行上的 $(1, 1), (1, 2), \dots, (m, m)$ 等 m^2 个有序数对出现的次数也相同。用 $L_N(m^k)$ 作试验设计时, N 表示试验次数, k 表示可能安排的因子的最大数目, m 表示因子的水平数,数字 $1, 2, \dots, m$ 分别表示因子的各个水平。

水平数不同的正交表 $L_N(m_1^{k_1} \times m_2^{k_2})$, 含意大体同上, 它由 k_1 个 m_1 水平的列和 k_2 个 m_2 水平的列组成, 用它作试验设计, 最多可以安排 k_1 个 m_1 水平的因子和 k_2 个 m_2 水平的因子。

本表列出了已知的 $N \leq 100$ 的 $L_N(m^k)$, 但不包括由正交拉丁方完全系直接构造的 $L_{49}(7^8)$, $L_{64}(8^9)$, $L_{81}(9^{10})$ (参见表 29 的说明), 以及不能求交互作用的 $L_{20}(2^{19})$, $L_{24}(2^{23})$ 等。对可以求交互作用的 $L_N(m^k)$, 列出了两列间的交互作用表, 以及主效应不与二因子交互作用混杂的设计表。另外还给出了一些水平数不同的正交表 $L_N(m_1^{k_1} \times m_2^{k_2})$ 。

表 I $L_8(2^7)$

| 行号 \ 列号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 5 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 6 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 7 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 8 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |

例如,表 I 就是正交表 $L_8(2^7)$, 它有 8 行 7 列; 每列由两个数字 1, 2 构成, 每个数字出现的次数相同 (都是 4 次); 任意两列中, $2^2=4$ 个有序数对 $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ 出现的次数也相同 (都是两次), 换句话说, 在任意一列出现某个数字 (例如 1) 的那些行里, 另外一列的各个数字 1, 2 出现相同的次数 (都是两次)。这个性质叫做两列间的正交性。

表 II $L_8(2^7)$ 的两列间交互作用表

| 列号 \ 列号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | | 3 | 2 | 5 | 4 | 7 | 6 |
| (2) | | | 1 | 6 | 7 | 4 | 5 |
| (3) | | | | 7 | 6 | 5 | 4 |
| (4) | | | | | 1 | 2 | 3 |
| (5) | | | | | | 3 | 2 |
| (6) | | | | | | | 1 |

表 II 是 $L_8(2^7)$ 的二列间交互作用表。欲找列 1 与列 2 的交互作用列,查表 II 的第一行第二列得数字“3”,即列 1 与列 2 的交互作用是列 3,记作

$$\text{列 } 1 \times \text{列 } 2 = \text{列 } 3.$$

又如找列 4 与列 6 的交互作用列,查表 II 的第 4 行第 6 列得数字“2”,即

$$\text{列 } 4 \times \text{列 } 6 = \text{列 } 2.$$

怎样用 $L_8(2^7)$ 来安排试验呢?

设有三个因素 A, B, C , 每个因素取两个水平 $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$. 用 $L_8(2^7)$ 安排试验: 将因素 A, B 分别放在列 1, 2 上, 查表 II 得列 $1 \times \text{列 } 2 = \text{列 } 3$, 即因素 A, B 的交互作用 $A \times B$ 在第 3 列, 所以因素 C 不能放在第 3 列, 我们将它放在第 4 列, 查表 II, $A \times C$ 在第 5 列, $B \times C$ 在第 6 列. 这个过程叫“表头设计”. 经这样设计以后, $L_8(2^7)$ 的行号就表示试验号, 列 1 中的 1, 2 分别表示 A 因素的两个水平 A_1, A_2 , 列 2 中的 1, 2 分别表示 B_1, B_2 , 列 4 中的 1, 2 分别表示 C_1, C_2 . 试验方案是: 第一个试验组合是 $A_1 B_1 C_1$, 第二个试验组合是 $A_1 B_1 C_2, \dots$, 第八个试验组合是 $A_2 B_2 C_2$. 将表头设计和试验方案归纳如下.

| 设计 | A | B | $A \times B$ | C | $A \times C$ | $B \times C$ | e |
|----|-----|-----|--------------|-----|--------------|--------------|-----|
| 列号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

| 试验号 | 因素 | | |
|-----|-------|-------|-------|
| | A | B | C |
| 1 | A_1 | B_1 | C_1 |
| 2 | A_1 | B_1 | C_2 |
| 3 | A_1 | B_2 | C_1 |
| 4 | A_1 | B_2 | C_2 |
| 5 | A_2 | B_1 | C_1 |
| 6 | A_2 | B_1 | C_2 |
| 7 | A_2 | B_2 | C_1 |
| 8 | A_2 | B_2 | C_2 |

注意试验方案中不出现交互作用列, 即作试验时要把交互作用列去掉. 正交表中的第 7 列是三因素交互作用 $A \times B \times C$ 列, 由于三因素以上的交互作用在一般情况下往往很小, 故可用来估计试验误差, 记作 e .

我们看到这样设计的试验, 三个因素各水平所有可能的试验组合(共八种)都做了, 这叫做全面试验.

如果有四个因素 A, B, C, D , 各有两个水平, 用 $L_8(2^7)$ 安排试验. 象上面那样, 将 A, B, C 分别放在列 1, 2, 4 上, 那么, 列 3, 5, 6 分别是 $A \times B, A \times C, B \times C$, 再将 D 放在剩下的第 7 列上. 查表 II 得 $A \times D$ 在第 6 列, $B \times D$ 在第 5 列, $C \times D$ 在第 3 列, 从而表头设计为

| 设计 | A | B | $C \times D$
$A \times B$ | C | $B \times D$
$A \times C$ | $A \times D$
$B \times C$ | D |
|----|-----|-----|------------------------------|-----|------------------------------|------------------------------|-----|
| 列号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

我们看到第 3 列上同时出现 $A \times B$ 和 $C \times D$, 这种现象叫做混杂, 即 A, B 的交互作用与 C, D 的交互作用混合掺杂在一起了, 以后分析试验数据时无法把它们单独分开. 同样, 这里 $B \times D$ 与 $A \times C$ 混杂, $A \times D$ 与 $B \times C$ 混杂. 本来四个两水平的因素所有可能的试验组合是 $2^4 = 16$ 个, 用 $L_8(2^7)$ 设计的 8 个组合只是其中的一部分, 这样的试验叫做部分实施. 由于减少了试验次数, 试验提供给我们的信息也随之减少, 从而产生了混杂. 但是, 如果事先从工艺上知道 $C \times D, A \times C, A \times D$ 很小, 可以忽略, 那么, 这样安排试验, 既没有混杂, 又减少了试验次数.

如果再有一个两水平因素 E , 它只能放在列 3, 5, 6 中的一列, 无论放在哪列, E 本身的主效应必与两个交互作用混杂。

由此可见, 用 $L_8(2^7)$ 安排四个以上因素的试验时, 要事先从工艺上分析各交互作用的有无, 以便作出适当的表头设计, 将需要考察的因素、交互作用放在不同的列上, 避免产生混杂。

如果任何交互作用都不存在, 那么, 用 $L_8(2^7)$ 就可以安排 7 个两水平因素的试验。

$m \geq 3$ 时, 完全类似。所不同的是, 由于 $L_N(m^k)$ 每列有 $m-1$ 个自由度, 而两因素的交互作用有 $(m-1)^2$ 个自由度, 所以它要占 $(m-1)$ 列。例如 $m=3$ 时, 交互作用占两列, $m=4$ 时, 交互作用占三列。

试验数据的分析按方差分析法进行。下面举例说明。

例 1 设有四个因素 A, B, C, D , 各取两个水平。从工艺上看, A 与 B , A 与 D 之间可能有交互作用, 其他交互作用可以忽略。怎样设计和分析?

利用 $L_8(2^7)$ 。把 A, B 分别放在列 1, 2 上, 则 $A \times B$ 在第 3 列, 所以 C, D 不能放在第 3 列, 将 D 放在第 4 列, 则 $A \times D$ 在第 5 列, 所以将 C 放在第 6 列。剩下第 7 列用来估计误差, 记作 e 。这就完成了设计。

得到试验数据后, 先作基本计算, 见表 III。

表 III $L_8(2^7)$ 的基本计算

| 设计 | A | B | $A \times B$ | D | $A \times D$ | C | e | 试验数据 | y^2 |
|-------|----------|----------|--------------|----------|--------------|----------|----------|--|----------------------|
| 列号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | y | |
| 试验号 | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | y_1 | y_1^2 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | y_2 | y_2^2 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | y_3 | y_3^2 |
| 4 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | y_4 | y_4^2 |
| 5 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | y_5 | y_5^2 |
| 6 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | y_6 | y_6^2 |
| 7 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | y_7 | y_7^2 |
| 8 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | y_8 | y_8^2 |
| K_1 | K_{11} | K_{12} | K_{13} | K_{14} | K_{15} | K_{16} | K_{17} | $T = \sum_{i=1}^8 y_i$ | $\sum_{i=1}^8 y_i^2$ |
| K_2 | K_{21} | K_{22} | K_{23} | K_{24} | K_{25} | K_{26} | K_{27} | $S_T^2 = \sum_{i=1}^8 y_i^2 - \frac{1}{8} T^2$ | |
| S^2 | S_1^2 | S_2^2 | S_3^2 | S_4^2 | S_5^2 | S_6^2 | S_7^2 | | |

其中

$$K_{ij} = \text{第 } j \text{ 列中数字“} i \text{”所对应的试验数据之和} \begin{pmatrix} i=1, 2, \\ j=1, 2, \dots, 7 \end{pmatrix},$$

$$S_j^2 = \frac{1}{N} (K_{1j} - K_{2j})^2,$$

$$S_T^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2 - \frac{1}{N} T^2 \left(T = \sum_{i=1}^N y_i, N \text{ 为试验次数, 这里 } N = 8 \right).$$

例如表 III 中

$$K_{11} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4,$$

$$K_{21} = y_5 + y_6 + y_7 + y_8,$$

$$K_{13} = y_1 + y_2 + y_7 + y_8, \quad K_{27} = y_2 + y_3 + y_5 + y_8.$$

不难看出 $K_{1j} + K_{2j} = T (j=1, 2, \dots, 7)$, 这可用来验算.

然后作方差分析, 列成表 IV.

表 IV 方差分析表

| 方差来源 | 平方和 S^2 | 自由度 f | 均方 S^2/f | 均方期望 | F 值 | 显著性 |
|-------|------------------------------------|----------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|--|-----|
| A | $S_A^2 = S_1^2$ | $f_A = 1$ | S_A^2/f_A | $\sigma^2 + 4\sigma_A^2$ | $F_A = \frac{S_A^2/f_A}{S_e^2/f_e}$ | |
| B | $S_B^2 = S_2^2$ | $f_B = 1$ | S_B^2/f_B | $\sigma^2 + 4\sigma_B^2$ | $F_B = \frac{S_B^2/f_B}{S_e^2/f_e}$ | |
| A × B | $S_{A \times B}^2 = S_3^2$ | $f_{A \times B} = 1$ | $S_{A \times B}^2/f_{A \times B}$ | $\sigma^2 + 2\sigma_{A \times B}^2$ | $F_{A \times B} = \frac{S_{A \times B}^2/f_{A \times B}}{S_e^2/f_e}$ | |
| C | $S_C^2 = S_4^2$ | $f_C = 1$ | S_C^2/f_C | $\sigma^2 + 4\sigma_C^2$ | $F_C = \frac{S_C^2/f_C}{S_e^2/f_e}$ | |
| D | $S_D^2 = S_5^2$ | $f_D = 1$ | S_D^2/f_D | $\sigma^2 + 4\sigma_D^2$ | $F_D = \frac{S_D^2/f_D}{S_e^2/f_e}$ | |
| A × D | $S_{A \times D}^2 = S_6^2$ | $f_{A \times D} = 1$ | $S_{A \times D}^2/f_{A \times D}$ | $\sigma^2 + 2\sigma_{A \times D}^2$ | $F_{A \times D} = \frac{S_{A \times D}^2/f_{A \times D}}{S_e^2/f_e}$ | |
| 误差 e | $S_e^2 = S_7^2$ | $f_e = 1$ | S_e^2/f_e | σ^2 | | |
| 总 和 | $S_T^2 = \sum y^2 - \frac{T^2}{8}$ | $f_T = 7$ | | | | |

其中

$$S_e^2 = S_7^2 = S_T^2 - \sum_{i=1}^6 S_i^2.$$

因素的自由度 = 其水平数 - 1, 例如 A 是两水平的, $f_A = 2 - 1 = 1$

两因素交互作用的自由度 = 两因素自由度相乘, 例如 $f_{A \times B} = f_A \times f_B = 1$,

总自由度 $f_T = N - 1$, 这里 $f_T = 8 - 1 = 7$,

误差自由度 $f_e = f_T -$ 各因素、交互作用自由度之和, 这里 $f_e = 7 - 6 = 1$,

σ^2 为误差的方差. $\sigma_A^2, \sigma_B^2, \sigma_{A \times B}^2, \sigma_C^2, \sigma_D^2, \sigma_{A \times D}^2$ 分别为 A, B, A × B, C, D, A × D 的效应平方和.

F 值和显著性两栏的填法: 以 A 因素为例, $F_A = \frac{S_A^2/f_A}{S_e^2/f_e}$, 当 $H_0: \sigma_A^2 = 0$ 时, 它遵从自

由度为 f_A, f_e 的 F 分布, 对给定的显著性水平 α , 由表 8 查出 $F_{f_A, f_e}(\alpha)$, 若 $F_A > F_{f_A, f_e}(\alpha)$, 则称因素 A 在 α 水平上显著. 否则, 就不能说因素 A 显著.

最后还须对主效应或交互作用显著的因素选出较优的水平 (参见例 3).

本例的分析方法对一般两水平试验都适用.

例 2 有五个因素 A, B, C, D, E, 各取三个水平, 除了 A × B 需考察外, 其他交互作用均可忽略. 怎样设计和分析?

利用 $L_{27}(3^{13})$. 把 A, B 分别放在列 1, 2 上, 查 $L_{27}(3^{13})$ 两列间交互作用表得 A × B 在列 3, 4. 把 C, D, E 分别放在列 5, 6, 7, 即得表 V 中的设计. 其中 K_{ij} = 第 j 列中

数字“i”所对应的试验数据之和 $\left(\begin{matrix} i=1, 2, 3, \\ j=1, 2, \dots, 13 \end{matrix} \right)$,

表 V $L_{27}(3^{13})$ 的基本计算

| 设计 | A | B | A × B | | C | D | E | e | e | e | e | e | e | 试验数据 | y^2 |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|------------|------------|--|-------------------------|
| 列号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | y | |
| 试验号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | y_1 | y_1^2 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | y_2 | y_2^2 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | y_3 | y_3^2 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 27 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | y_{27} | y_{27}^2 |
| K_1 | K_{11} | K_{12} | K_{13} | K_{14} | K_{15} | K_{16} | K_{17} | K_{18} | K_{19} | $K_{1,10}$ | $K_{1,11}$ | $K_{1,12}$ | $K_{1,13}$ | $T = \sum_{i=1}^{27} y_i$ | $\sum_{i=1}^{27} y_i^2$ |
| K_2 | K_{21} | K_{22} | K_{23} | K_{24} | K_{25} | K_{26} | K_{27} | K_{28} | K_{29} | $K_{2,10}$ | $K_{2,11}$ | $K_{2,12}$ | $K_{2,13}$ | $S_j^2 = \sum_{i=1}^{27} y_i^2 - \frac{1}{27} T^2$ | |
| K_3 | K_{31} | K_{32} | K_{33} | K_{34} | K_{35} | K_{36} | K_{37} | K_{38} | K_{39} | $K_{3,10}$ | $K_{3,11}$ | $K_{3,12}$ | $K_{3,13}$ | | |
| S^2 | S_1^2 | S_2^2 | S_3^2 | S_4^2 | S_5^2 | S_6^2 | S_7^2 | S_8^2 | S_9^2 | S_{10}^2 | S_{11}^2 | S_{12}^2 | S_{13}^2 | | |

$$S_j^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^m K_{ij}^2 - \frac{1}{N} T^2,$$

这里因素的水平数 $m=3$, 水平的重复次数 $r=9$, 试验次数 $N=27$.

另外, 同样有 $\sum_{i=1}^3 K_{ij} = T (j=1, 2, \dots, 13)$ 可作验算.

表 VI 方差分析表

| 方差来源 | 平方和 S^2 | 自由度 f | 均方 S^2/f | 均方期望 | F 值 | 显著性 |
|-------|------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|--|-----|
| A | $S_A^2 = S_1^2$ | $f_A = 2$ | S_A^2/f_A | $\sigma^2 + 9\sigma_A^2$ | $F_A = \frac{S_A^2/f_A}{S_e^2/f_e}$ | |
| B | $S_B^2 = S_2^2$ | $f_B = 2$ | S_B^2/f_B | $\sigma^2 + 9\sigma_B^2$ | $F_B = \frac{S_B^2/f_B}{S_e^2/f_e}$ | |
| A × B | $S_{A \times B}^2 = S_3^2 + S_4^2$ | $f_{A \times B} = 2 \times 2 = 4$ | $S_{A \times B}^2/f_{A \times B}$ | $\sigma^2 + 3\sigma_{A \times B}^2$ | $F_{A \times B} = \frac{S_{A \times B}^2/f_{A \times B}}{S_e^2/f_e}$ | |
| C | $S_C^2 = S_5^2$ | $f_C = 2$ | S_C^2/f_C | $\sigma^2 + 9\sigma_C^2$ | $F_C = \frac{S_C^2/f_C}{S_e^2/f_e}$ | |
| D | $S_D^2 = S_6^2$ | $f_D = 2$ | S_D^2/f_D | $\sigma^2 + 9\sigma_D^2$ | $F_D = \frac{S_D^2/f_D}{S_e^2/f_e}$ | |
| E | $S_E^2 = S_7^2$ | $f_E = 2$ | S_E^2/f_E | $\sigma^2 + 9\sigma_E^2$ | $F_E = \frac{S_E^2/f_E}{S_e^2/f_e}$ | |
| 误差 e | $S_e^2 = \sum_{j=8}^{13} S_j^2$ | $f_e = 26 - 14 = 12$ | S_e^2/f_e | σ^2 | | |
| 总和 | $S_T^2 = \sum y^2 - \frac{T^2}{N}$ | $f_T = 26$ | | | | |

其中 $S_T^2 = \sum_{j=8}^{13} S_j^2 = S_T^2 - \sum_{j=1}^7 S_j^2$, 其他同前例.

本例的分析方法对任意水平数的试验都适用, 包括两水平的试验和水平数不同的试验.

用水平数不同的正交表 $L_N(m_1^{k_1} \times m_2^{k_2})$ 安排的试验, 作方差分析时, 计算各列的 K_1, K_2, \dots, K_{m_1} (或 K_1, K_2, \dots, K_{m_2}) 的方法同前. 计算各列平方和 S^2 时, 水平数是 m_1 的列, 用 $S_j^2 = \frac{1}{r_1} \sum_{i=1}^{m_1} K_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$, 其中 r_1 是该列各水平的重复次数. 水平数是 m_2 的列, 用 $S_j^2 = \frac{1}{r_2} \sum_{i=1}^{m_2} K_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$, 其中 r_2 是这一列中各水平的重复数. 其他, 如自由度、均方、 F 值、显著性的计算方法都如例 1 所述.

例 3 为了提高某生产过程的得率, 考察四个因素: 物料 A 、物料 B 、时间 C 和液比 D , 各取两个水平.

| 因素
水平 | A 的用量 (%) | B 的用量 (%) | 时间 C (分) | 液比 D |
|----------|-------------|-------------|------------|--------|
| 1 | 18 | 12 | 180 | 1:2.5 |
| 2 | 16 | 14 | 215 | 1:2.0 |

从工艺上分析, A 与 B , A 与 C , B 与 C 之间可能有交互作用, 其他交互作用可以忽略. 想通过试验分析各因素对得率的影响以及各取什么水平得率最高.

利用 $L_8(2^7)$, 试验的设计和 data 如下表.

| 设计
列号 | A | B | $A \times B$ | C | $A \times C$ | $B \times C$ | D | 试验数据得率
y (%) | y^2 |
|----------------------------------|----------------|---------------|---------------|------------------|-----------------|---------------|-----------------|--|--------------------|
| 试验号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 46 | 2116 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 58 | 3364 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 40 | 1600 |
| 4 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 62 | 3844 |
| 5 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 49 | 2401 |
| 6 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 57 | 3249 |
| 7 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 55 | 3025 |
| 8 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 52 | 2704 |
| K_1 | 206 | 210 | 211 | 190 | 195 | 209 | 220 | $T = \sum y = 419$ | $\sum y^2 = 22803$ |
| K_2 | 213 | 209 | 208 | 229 | 224 | 210 | 199 | | |
| $K_1 - K_2$ | -7 | 1 | 3 | -39 | -29 | -1 | 21 | $S_7^2 = \sum y^2 - \frac{T^2}{8} = 357 \frac{7}{8}$ | |
| $S^2 = \frac{1}{8}(K_1 - K_2)^2$ | $\frac{49}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{1521}{8}$ | $\frac{841}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{441}{8}$ | | |

由上面计算可以看出, $S_2^2 = S_6^2 = \frac{1}{8}$ 比其他列的平方和小得多, 它们实际上是由于误差造成的, 可以用来估计误差, 从而得下页表.

方差分析表

| 方差来源 | 平方和 | 自由度 | 均方 | F值 | 显著性 |
|------|------------------|-----|--------|------|-----|
| A | 49/8 | 1 | 49/8 | 49 | * |
| A×B | 9/8 | 1 | 9/8 | 9 | |
| C | 1521/8 | 1 | 1521/8 | 1521 | ** |
| A×C | 841/8 | 1 | 841/8 | 841 | ** |
| D | 441/8 | 1 | 441/8 | 441 | ** |
| e | 2/8 | 2 | 1/8 | | |
| 总和 | $957\frac{7}{8}$ | 7 | | | |

查表 8 得 $F_{1,2}(0.01)=98.5, F_{1,2}(0.05)=18.5$ 。由于因素 C, A×C, D 的 F 值皆大于 98.5 所以 C, A×C, D 在 0.01 的水平上显著。这说明 C, A×C, D 对得率的影响很显著。由于 $F_A > 18.5$, 所以 A 在 0.05 的水平上显著, 这说明 A 对得率的影响也显著。由于 $F_{A \times B} < 18.5$, 所以不能说 A×B 对得率有显著影响。0.05 和 0.01 显著的, 分别记上 * 和 **。

单从主效应的角度看, 因为 $K_{21} > K_{11}, K_{24} > K_{14}, K_{17} > K_{27}$, 所以 A 取 $A_2(16\%)$, C 取 $C_2(215分)$, D 取 $D_1(1:2.5)$ 为好。由于 A×C 显著, 所以必须看 A 与 C 的那种搭配好。为此计算 A 与 C 的各种搭配下的平均得率。

| 得率
C \ A | A | |
|-------------|----------------------|------------------------|
| | A_1 | A_2 |
| C_1 | $\frac{46+40}{2}=43$ | $\frac{49+55}{2}=52$ |
| C_2 | $\frac{58+62}{2}=60$ | $\frac{57+52}{2}=54.5$ |

所以取 A_1C_2 为好。当从主效应选出的最优水平与从两因素搭配选出的最优水平矛盾时, 应以后者为准。

综上所述, 最好的工艺是: $A_1(18\%)C_2(215分)D_1(1:2.5)$, 而 B 则可任意取一个水平。如从节约的角度出发, 可取 $B_1(12\%)$ 。

有时, 还需进一步给出最好工艺下的平均得率和它的区间估计。因篇幅所限, 这里不讲。读者可参看[16]。

表 31—32

平衡不完全区组(以下简称 BIB)设计, 作为一种试验设计, 可以用来解决下面这种问题: 人们想通过试验来比较 v 种处理或品种, 但只能在容量为 $k(<v)$ 的区组(同一的环境条件, 如地力均匀的一块土地)中进行, 应该怎样合理地安排试验。

一个 BIB 设计是把 v 个处理或品种安排在 b 个区组, 使得(i)每个区组包含 $k(<v)$ 个不同处理, (ii)每个处理出现于 r 个区组, (iii)任意两个处理一起出现于 λ 个区组。由此可见, BIB 设计有两个特点: 第一, 各个处理的重复数相同, 第二, 任意一对处理在同一区组进行比较的次数相同。由于这些特点, 处理得到公平的比较。

v, k, r, b, λ 称为 BIB 设计的参数。

BIB 设计存在的必要条件是：

$$vr = kb, \quad (106)$$

$$r(k-1) = \lambda(v-1), \quad (107)$$

$$b \geq v, \quad r \geq k. \quad (108)$$

表 31 就 $r \leq 10$ 的范围内给出已经存在设计的参数组。其中

$$E = \frac{\lambda v}{rk} \quad (109)$$

是效率因子，用来表示 BIB 设计相对于随机区组（区组容量为 v ，重复数为 r ）设计的效率。也就是在 BIB 设计中两个处理比较的精度要降低为随机区组的 E 倍。

表 32 给出表 31 所列参数组的设计方案。设计中的数码 1, 2, 3, ... 表示处理号，而行构成区组。

BIB 设计试验结果的统计分析（这里只讲到利用区组内讯息的分析法）：

例 要比较 5 种工艺，分配给 10 个工厂进行试验，每个工厂答应承担试验 3 种工艺。每个工厂的试验条件基本上可以认为是不变的，但不同工厂的试验条件有系统差异，因此把 10 个工厂看成 10 个区组。

用 BIB 设计进行这项试验，其参数中， $v=5, b=10, k=3$ ，查表 31 得知：可用设计 4，即用 $v=5, k=3, r=6, b=10, \lambda=3$ 的设计来安排试验。试验方案及试验结果如下表。

表 I 试验结果计算表

| 试验结果
(产量)
区组(工厂号) | 处 理
(工 艺) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | B_i |
|---------------------------------------|--------------|-------|-------|--------|-------|--------|--------|
| 1 | | 54.2 | 51.0 | 33.1 | | | 138.3 |
| 2 | | | 25.7 | 34.5 | 30.6 | | 90.8 |
| 3 | | | | 39.4 | 55.3 | 44.6 | 139.3 |
| 4 | | 44.3 | | | 31.6 | 14.0 | 89.9 |
| 5 | | 53.7 | 42.6 | | | 38.6 | 139.9 |
| 6 | | 23.1 | 36.6 | | 46.6 | | 111.3 |
| 7 | | | 21.3 | 16.0 | | 13.1 | 50.4 |
| 8 | | 50.9 | | 18.1 | 45.4 | | 114.4 |
| 9 | | | 30.9 | | 46.6 | 35.6 | 113.1 |
| 10 | | 60.2 | | 39.1 | | 33.2 | 132.5 |
| V_i | | 296.4 | 203.1 | 130.2 | 256.1 | 179.1 | 1119.9 |
| T_i | | 726.3 | 643.8 | 665.7 | 653.8 | 665.1 | |
| $Q_i = kV_i - T_i$ | | 162.9 | -19.5 | -125.1 | 109.5 | -127.3 | |
| $\hat{v}_i = \frac{1}{\lambda v} Q_i$ | | 10.86 | -1.20 | -8.34 | 7.30 | -8.52 | |
| 修正后的处理平均数 | | 43.19 | 36.03 | 23.99 | 44.63 | 23.81 | |

在这个实例的试验中，每个处理重复了 6 次试验，每个区组试验了 3 种处理，任意两个处理在相同区组碰头 3 次。这样安排可使各个处理得到公平的比较。

试验结果分析的计算步骤是：

(1) 计算各个处理的产量和 V_i ，

$V_i =$ 第 i 个处理的产量和,

例如

$$V_1 = 54.2 + 44.3 + 58.7 + 28.1 + 50.9 + 60.2 = 296.4.$$

(2) 计算各个区组的产量和 B_j ,

$B_j =$ 第 j 个区组的产量和,

例如

$$B_1 = 54.2 + 51.0 + 33.1 = 138.3.$$

(3) 计算各个处理的 Q_i ,

$$Q_i = kV_i - T_i, \quad (110)$$

其中

$T_i =$ 包含第 i 个处理的区组的产量和的合计,

例如

$$\begin{aligned} T_1 &= B_1 + B_4 + B_5 + B_6 + B_8 + B_{10} \\ &= 138.3 + 89.9 + 139.9 + 111.3 + 114.4 + 132.5 = 726.3, \\ T_2 &= B_1 + B_2 + B_5 + B_6 + B_7 + B_9 \\ &= 138.3 + 90.8 + 139.9 + 111.3 + 50.4 + 113.1 = 643.8, \\ &\dots\dots\dots \\ Q_1 &= 3 \times V_1 - T_1 = 3 \times 296.4 - 726.3 = 162.9, \\ Q_2 &= 3 \times V_2 - T_2 = 3 \times 208.1 - 643.8 = -19.5, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

(4) 计算各处理效应的估计量 \hat{v}_i ,

$$\hat{v}_i = \frac{1}{\lambda v} Q_i, \quad (111)$$

本例中 $\lambda = 3, v = 5$.

(5) 修正的处理平均数 $= \hat{v}_i + \bar{y}$, 本例 $\bar{y} = \frac{1119.9}{30} = 37.33$. ($N = bk = vr = 30$)

表 II 计算结果的方差分析表

| 方差来源 | 平方和 | 自由度 | 均方
(平方和÷自由度) | F | 显著性 |
|----------|---------|-----|-----------------|-------------------------------|-----|
| 处理间 | 1575.33 | 4 | 393.83 | $\frac{393.83}{56.20} = 7.01$ | ** |
| 区组间(未调整) | 2458.50 | 9 | | | |
| 误差 | 899.15 | 16 | 56.20 | | |
| 合计 | 4932.93 | 29 | | | |

** 表示对 $\alpha = 0.01$ 显著.

表 II 中诸平方和按照下列公式计算:

$$\text{处理平方和 } S_{\text{处}}^2 = \frac{1}{\lambda k v} \sum_{i=1}^v Q_i^2, \quad (112)$$

$$\text{区组平方和 } S_{\text{区}}^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^b B_j^2 - \frac{G^2}{N}, \quad G = \sum_{ij} y_{ij}, \quad (113)$$

$$\text{误差平方和 } S_{\text{误}}^2 = \sum_{ij} y_{ij}^2 - \frac{1}{k} \sum_j B_j^2 - \frac{1}{\lambda k v} \sum_{i=1}^v Q_i^2, \quad (114)$$

$$\text{总平方和 } S_{\text{总}}^2 = \sum_{ij} y_{ij}^2 - \frac{G^2}{N}, \quad (115)$$

此处 \sum_{ij} 是表示对按 BIB 设计各试验点求和, 以下相同, 不再作说明。

为了检查处理对试验结果的影响, 作假设 $H: v_i = 0, i = 1, 2, \dots, v$. 检验此假设的否定域为:

$$F = \frac{S_{\text{处}}^2 / (v-1)}{S_{\text{误}}^2 / f_e} > F_{v-1, f_e}(\alpha),$$

其中 v_i 表示第 i 个处理的效应, f_e 表示误差的自由度, α 为显著性水平, $F_{v-1, f_e}(\alpha)$ 为表 8 查得的临界值. 实例中 $\alpha = 0.01, F_{4, 16}(0.01) = 4.77$, 比 $F = 7.01$ 小, 故处理的不同对试验结果有显著影响。

对假设 $H: v_i = v_j (i \neq j)$, 可用

$$\frac{\lambda v}{2k} (\hat{v}_i - \hat{v}_j)^2 / S_{\text{误}}^2 / f_e > F_{1, f_e}(\alpha)$$

作检验 H 的否定域。

假如检验结果表明处理有显著影响, 为了挑出最好的处理, 可以比较表 I 的最后一行, 即比较“修正后的处理平均数”, 看哪一个处理平均数最大. 表 I 表明第一种处理产量最高。

BIB 设计的统计分析模型:

假定

$$\left. \begin{aligned} (1) & y_{ij} = \mu + v_i + b_j + \varepsilon_{ij}, \quad i, j \text{ 按 BIB 设计方案取,} \\ (2) & \text{约束条件 } \sum_{i=1}^v v_i = \sum_{j=1}^b b_j = 0, \\ (3) & \varepsilon_{ij} \text{ 相互独立, 且 } \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2), \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

此处 y_{ij} 表示第 i 个处理在第 j 个区组的观测值, μ 表示理论总平均, v_i 表示第 i 个处理的效应, b_j 表示第 j 个区组的效应, ε_{ij} 表示试验误差。

检验假设 $H: v_i = 0, i = 1, 2, \dots, v$. 令

$$S^2 = \sum_{ij} [y_{ij} - \mu - v_i - b_j]^2, \quad (117)$$

μ, v_i, b_j 的最小二乘估计分别为

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{v}_i &= \frac{1}{\lambda v} (kV_i - T_i), \\ \hat{b}_j &= \frac{1}{k} B_j - \frac{1}{k} \sum_{(i)} \hat{v}_i - \bar{y}, \\ \hat{\mu} &= \bar{y}, \end{aligned} \right. \quad (118)$$

式中, $V_i =$ 第 i 个处理的观察值之和,

B_j = 第 j 个区组的观察值之和(简称第 j 个区组和),

$T_i = \sum_{(i)} B_j$ = 含有处理 v_i 的“区组和”的合计,

$\sum_{(j)} \hat{v}_i$ = 出现在区组 j 的所有处理效应的估计量之和.

为了检验假设 H , 必须求出误差平方和 $S_{\text{误}}^2$ 以及处理平方和 $S_{\text{处}}^2$.

$$\begin{aligned} S_{\text{误}}^2 &= \min \sum_{ij} [y_{ij} - \mu - v_i - b_j]^2 = \sum_{ij} [y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{v}_i - \hat{b}_j]^2 \\ &= \sum_{ij} y_{ij}^2 - \frac{1}{k} \sum_j B_j^2 - \frac{1}{\lambda k v} \sum_i Q_i^2. \end{aligned}$$

当假设 H 成立时,

$$\begin{aligned} S_H^2 &= \min_{\mu, b_j} \sum_{ij} [y_{ij} - \mu - b_j]^2 \\ &= \sum_{ij} y_{ij}^2 - \frac{1}{k} \sum_j B_j^2, \end{aligned}$$

因此

$$S_{\text{处}}^2 = S_H^2 - S_{\text{误}}^2 = \frac{1}{\lambda k v} \sum_i Q_i^2,$$

于是 $\frac{S_{\text{处}}^2/(v-1)}{S_{\text{误}}^2/f_e}$ 遵从 F 分布, 可用 F 检验, 来检验假设 $H: v_i = 0, i = 1, 2, \dots, v$.

对于假设 $v_i = v_j (i \neq j)$ 也可完全按上述思考方法进行检验, 不再赘述了.

表 33

随机数表由 0 到 9 的数字随机地排列而成. 表 33 只给出两页, 每页有 $50 \times 50 = 2500$ 个数字, 排成 50 行 50 列, 因此根据需要可把它当作任何位数来使用. 随机数表的用处极其广泛, 这里只说明试验次序随机化和随机抽样的用法.

决定页码 闭上眼睛把铅笔放在随机数表上, 由于本表只有两页, 若笔尖落到的数字是奇数(把 0 看作偶数), 则决定取第一页, 否则取第二页.

决定起点 闭上眼睛把铅笔放在随机数表上, 用笔尖落到的二位数来决定行(当笔尖落到的二位数是 51—99 或 00 时, 减去或加上 50 使之成为 01—50), 以相同的做法来决定列.

前进方向 从第几页第几行第几列出发, 如果取的是一位或二位数, 则往右边取; 如果到达右端, 则移到下一行的左端继续往右边取. 如果取的是三位以上的数, 则往下边取; 如果到达下端, 则移到下一列的上端继续往下边取.

例如, 闭上眼睛放下铅笔, 笔尖落在数字 6 上, 我们取第二页. 还是闭上眼睛放下铅笔, 笔尖落在 97 上, 我们决定第 $97 - 50 = 47$ 行. 再次闭上眼睛放下铅笔, 笔尖落在 07 上, 我们决定第 7 列. 于是从第二页第 47 行第 7 列出发, 二位数取 79, 80, 24, 36, \dots ; 三位数取 798, 988, 034, 055, 761, 499, \dots .

对试验次序的随机化, 当试验数 $N < 100$ 时, 按随机数表二位数的进行, 当 $N \geq$

100 时,按随机数表三位数的大小进行(如有必要,取由某数除后的余数),去掉其中的重复和无用的。

例 1 $L_8(2^7)$ 有 8 个试验,01 看作 1,02 看作 2,⋯,08 看作 8,09 看作 1,10 看作 2,⋯即对 09—96 取以 8 除之后的余数,并去掉 97—99 和 00. 余数为 1,2,⋯,0 的分别看作 1,2,⋯,8. 例如从第 2 页 47 行 7 列开始,有随机数: 79 80 24 36 59 87 38 82 07 53 89, 余数: 7 0 0 4 3 7 6 2 7 5 1, 记上底线的是重复,必须去掉. 随机化的结果是第 1 个试验放在第 7 次做,第 2 个试验放在第 8 次做,其余类推。

当从号码 1— N 中抽取 n 个时,按上述方法,一直抽到 n 为止。

例 2 欲从 1—30 个当中随机地抽取 5 个时,以 50 除的余数是 29,30,24,36,9,37,38,32,07,在去掉无用者后,29,30,24,9,7 便是被抽取的号码。

例 3 欲从 1—180 个当中随机地抽取 10 个时,从第二页第 47 行第 7 列向下取得三位数 798,988,034,055,761,499,606,965,601,971,248,901,用 200 除的余数是 198,188,34,55,161,99,6,165,1,171,48,101,去掉无用者 198,188 之后,其余 10 个号码便是 180 个当中被抽取的号码。

参 考 书 目

- [1] E. S. Pearson and H. O. Hartley, *Biometrika tables for statisticians*, Vol. I, Cambridge, England: The University Press, 1966.
- [2] D. B. Owen, *Handbook of statistical tables*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1962.
- [3] W. Sadowski, T. Czechowski, M. Fisz, T. Iwinski, O. Lange, R. Zasa, *Tablice statystyczne*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1957.
- [4] R. A. Fisher and F. Yates, *Statistical tables for biological, agricultural and medical research*, Oliver & Boyd, Edinburgh, 1957.
- [5] Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов, *Таблицы математической статистики*, Издательство «Наука» Москва, 1965.
- [6] W. H. Beyer, *Handbook of tables for probability and statistics*, Chemical Rubber Co., 1966.
- [7] A. Hald, *Statistical tables and formulas*, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1952.
- [8] National Bureau of Standards (U.S.A.), *Tables of the binomial probability distribution*, Applied Mathematics, Series 6, Washington 25, D.C.: U. S. Government Printing Office, Superintendent of Documents, 1952.
- [9] 北川敏男, 三留三千男, *实验计画要因配置表*, 培风馆, 东京, 1953.
- [10] A. Hald, *Statistical theory with engineering applications*, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1955.
- [11] H. Scheffé, *The analysis of Variance*, New York, John Wiley & Sons, Inc., London, Chapman & Hall Limited, 1959.
- [12] H. B. Mann, *Analysis and design of experiments*, New York, Dover Publications, 1949.
中译本: H. B. 曼, *试验的分析与设计*, 科学出版社, 1965.
- [13] M. Fisz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1958.
中译本: M. 费史, *概率论及数理统计*, 上海科学技术出版社, 1962.
- [14] 周华章, *工业技术应用数理统计学*, 高等教育出版社, 1965.
- [15] 田口玄一, 小西省三, *直交表による実験のわりつけ方—例题と演習*, 日科技連出版社, 东京, 1959.
- [16] 田口玄一, *新版実験計画法 [上], [下]*, 丸善株式会社, 东京, 1962.
- [17] J. W. Tukey, *Quick and dirty methods in statistics*, Part II, Simple analysis for standard designs, Proc. Fifth Annual Convention, Amer. Soc. for Quality Control (1951), 187—197.
- [18] H. Scheffé, A method for judging all contrasts in the analysis of variance, *Biometrika*, 40 (1953), 87—104.
- [19] F. S. Swed and C. Eisenhart, *Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternatives*, *Annals of Math. Stat.*, Vol. 14 (1943), 66—87.
- [20] F. Mosteller, Note on an application of runs quality control charts, *Annals of Math. Stat.*, Vol. 21 (1941), 228—232.
- [21] 中国科学院数学研究所概率统计室普及组, 介绍几种简易的数理统计方法, *数学的实践与认识*, 6期 (1972), 58—66.
- [22] R. L. Anderson and E. E. Houseman, *Tables of orthogonal Polynomial values extended to N=104*, Iowa State Coll. Agric. Expt. Station, Research Bulletin 292, Ames, Iowa, 1942.
- [23] D. Van der Reyden, Curve fitting by the Orthogonal polynomials of least squares, *Onderste-poort Journal of Veterinary Science and Animal Industry*, Vol. 28 (1943), 355—404.
- [24] P. G. Guest, *Numerical methods of curve fitting*, Cambridge University Press.
- [25] R. C. Bose, I. M. Chakravarti, and D. E. Knuth, On methods of constructing sets of Mutually orthogonal Latin squares using a computer I, *Technometrics* 2 (1960), 207—216.
- [26] E. T. Parker, *Orthogonal Latin squares*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 45 (1959), 859—862.
- [27] J. M. Cameron, *Tables for constructing and computing the Operating characteristics of single sampling plan*, *Industrial Quality Control*, 39, July (1952).
- [28] 北京大学数学力学系应用数学组, *试验设计*, *数学的实践与认识*, 6期 (1972), 1—25.
- [29] 中国科学院数学研究所统计组, *常用数理统计方法*, 科学出版社, 1973.